

ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ САНКТ-ПЕТЕРБУРГ 2018

5–8 классы

Контакты оргкомитета

Алексеев Илья Сергеевич (председатель методической комиссии) ilyaalekseev@yahoo.com

Потемкин Андрей Андреевич (координатор турнира) aapotyomkin@gmail.com

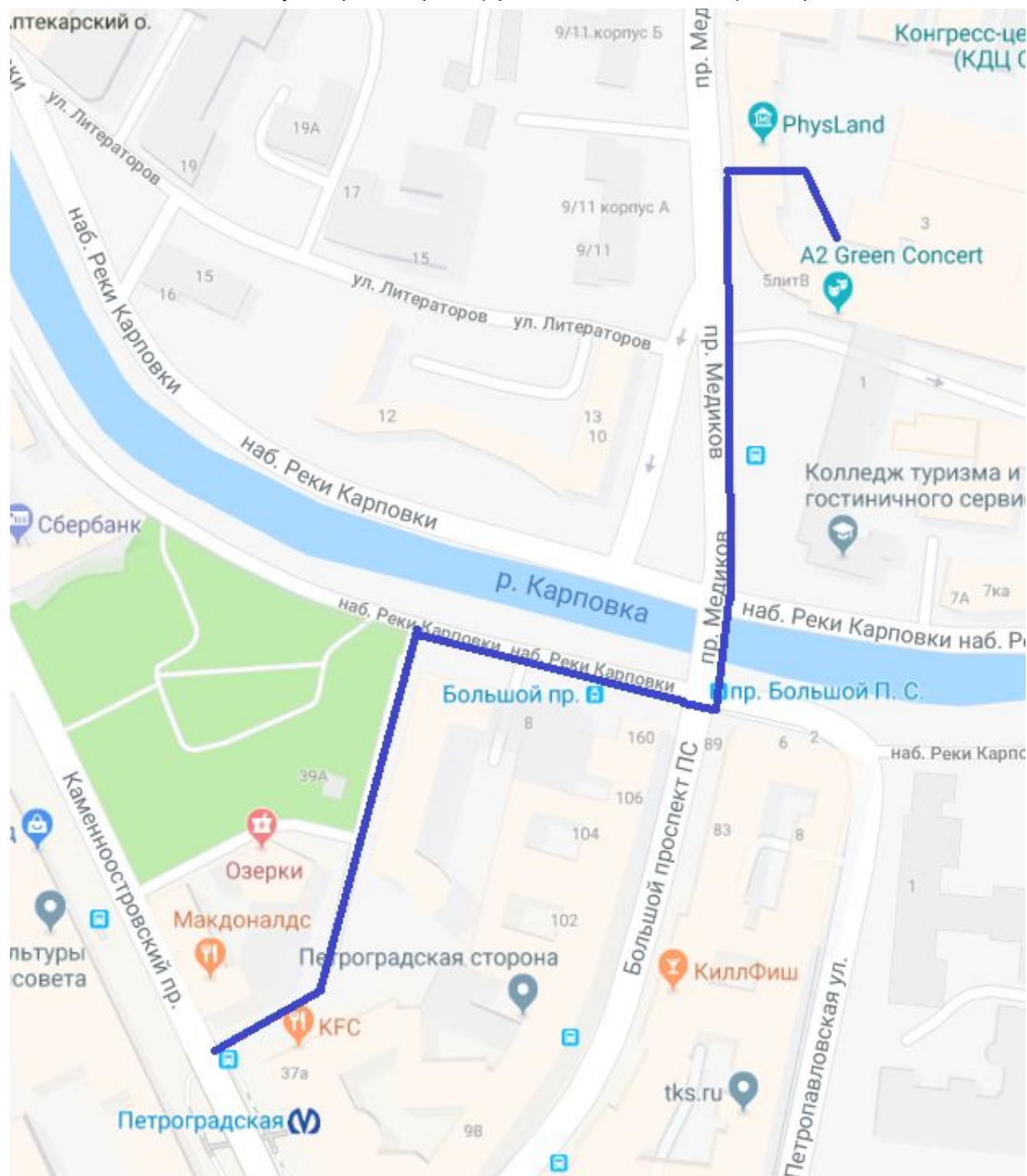
Чистяков Илья Александрович (председатель оргкомитета) ilya@timeforscience.ru

Белошапка Марина Вадимовна (информирование) bmw@timeforscience.ru

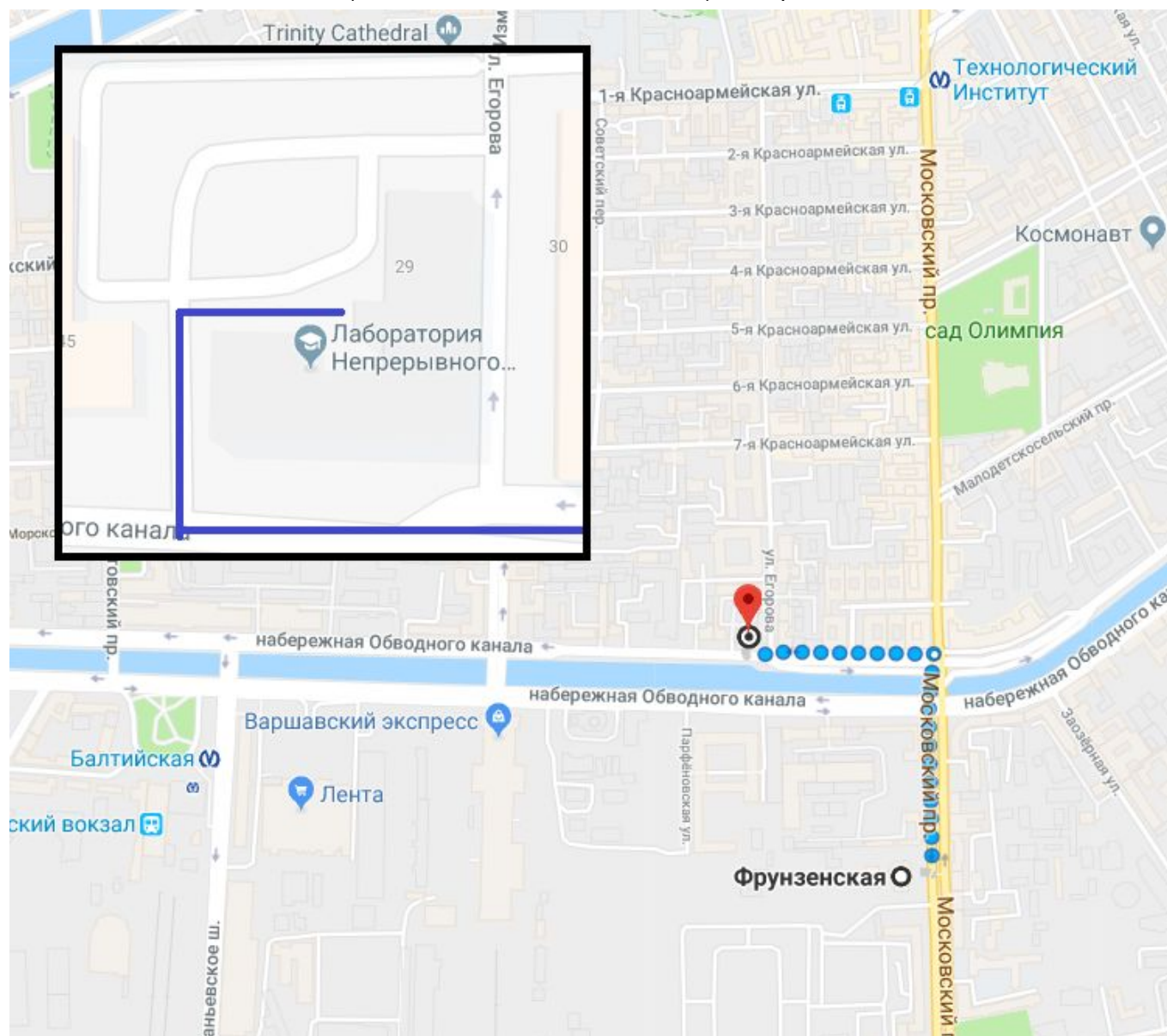
Рогушкин Кирилл Александрович (поселение иногородних команд) kirill.rogushkin@gmail.com

Карта

Расположение бизнес-инкубатора «Ингрия» (пр. Медиков, д.3, лит. А) на карте



Расположение школы №564 (наб. Обводного канала д. 143) на карте



Участники турнира

ГБОУ СОШ № 625 Невского района Санкт-Петербурга 1. Гришмановский Данила Андреевич 2. Астафуров Дмитрий Васильевич 3. Балакан Анастасия Дмитриевна 4. Лозинский Алексей Владимирович 5. Григорьевский Евгений Вячеславович 6. Кузаев Владислав Андреевич Руководитель Крылов Валерий	ГБОУ Лицей № 393 Кировского района Санкт-Петербурга 1. Смирнова Надежда 2. Заболотников Андрей 3. Лутова Дарья 4. Хабарова Лия Руководитель Туманова Ирина
ГОО Гимназия № 29 г. Минска, Беларусь, 6 класс 1. Крутько Кирилл 2. Хомич Никита 3. Дубовицкая Валентина 4. Шульгович Егор	ГБОУ СОШ № 241 Адмиралтейского района Санкт-Петербурга, 6 класс 1. Денисов Федор 2. Дружинин Артемий 3. Харитонов Родион 4. Гусев Максим

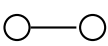
5. Мухамедов Байрам Руководители Шило Виталий, Палюхович Антон	5. Зайделов Никита 6. Карпова Полина Руководитель Мамедов Гейдар
ГБОУ Гимназия № 29 г. Минска, Беларусь, 8 класс 1. Безрученко Ксения 2. Кузьмич Яна 3. Егунов Ярослав 4. Палюхович Николай Руководители Шило Виталий, Палюхович Антон	ГБОУ СОШ № 241 Адмиралтейского района Санкт-Петербурга, 5 класс 1. Райцын Роман 2. Колосов Клим 3. Каиров Роман 4. Магарламова Екатерина 5. Чичерин Александр 6. Руковчук Павел 7. Липский Максим Руководитель Сенчук Никита
ГБОУ Лицей № 144 Калининского района Санкт-Петербурга 1.Парнюков Даниил Андреевич 2.Гуляев Евгений Максимович 3.Кабаргин Даниела Милена 4.Гагарина Алиса Алексеевна 5.Туманов Тимофей Сергеевич 6. Корольчук Кристина Игоревна Руководитель Решетникова Екатерина	ГБОУ СОШ № 564 Адмиралтейского района Санкт-Петербурга, 7 класс 1. Бородинова Екатерина 2, Денисова Александра 3. Дойникова Екатерина 4. Иванов Андрей 5. Борисенко Роман 6. Шишмарёв Виктор 7 .Грищенко Илья 8. Шутова Александра Руководитель Вагнер Максим
ГБОУ СОШ № 241 Адмиралтейского района Санкт-Петербурга, 8 класс 1. Милюков Николай 2. Туйкин Карим 3. Глумов Алексей 4. Филянов Сергей 5. Майборода Антон 6. Шовкопляс Александра Сергеевна Руководитель Прокофьева Ирина	ГБОУ СОШ № 564 Адмиралтейского района Санкт-Петербурга, 8 класс 1. Мукосеев Лев 2. Пакульневич Константин 3. Глаголев Иван 4. Беляков Данила 5. Зарезин Артём 6. Филин Лев 7. Бухаров Марк Руководитель Золотов Борис Алексеевич
ГБОУ СОШ № 241 Адмиралтейского района Санкт-Петербурга, 7 класс 1. Григорьева Мария 2. Семенова Ася 3. Миронова Инна 4. Ильина Полина 5. Львов Григорий 6. Соколов Павел Руководитель Кузнецов Кирилл	ГБОУ СОШ № 564 Адмиралтейского района Санкт-Петербурга, 8 класс 1. Травин Александр 2. Фарафонов Егор 3. Ващенко Алексей 4. Цыганенко Павел 5. Дьяконов Александр 6. Дудин Кирилл Руководитель Золотов Борис Алексеевич

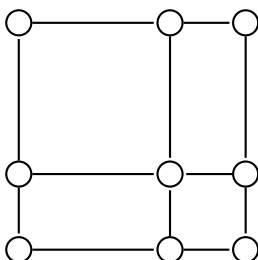
VII САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

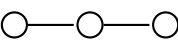
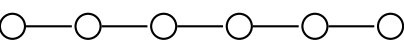
5-8 классы

Задача №1 Геометрия принципа Дирихле

На бесконечную плоскость вылили краску: каждая точка плоскости покрасилась в черный или белый цвет, причем есть как черные точки, так и белые. Мы интересуемся, какие конфигурации разноцветных фигур обязаны возникнуть на плоскости. Рассмотрим следующий список:

1. Отрезок 
2. Равнобедренный треугольник
3. Прямоугольный треугольник
4. Равнобедренный прямоугольный треугольник
5. Правильный треугольник
6. Прямоугольник
7. Прямоугольник с дополнительными вершинами, образующими 4 прямоугольника (внутренняя вершина выбирается произвольно — любая подобная фигура подойдет)

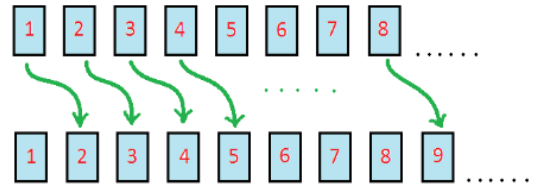


8. Отрезок, разбитый на две равные части 
9. Отрезок, разбитый на n равных частей 
1. Для фигур из списка выше ответьте на следующий вопрос: обязательно ли на плоскости найдутся одноцветные точки, расположенные в форме вершин такой фигуры (без ограничений на величины длин сторон — фигуры можно вращать и масштабировать)? Например, если взять любые три разные точки на плоскости, две из них обязаны быть покрашены в один цвет, поэтому они будут образовывать одноцветный отрезок.
2. Пусть теперь плоскость покрашена в три цвета. Как изменятся ответы на вопрос первого пункта?
3. Для фигур с n вершинами из списка выше выясните, при любой ли раскраске плоскости в n цветов найдётся n точек различного цвета, расположенных в форме вершин такой фигуры. Например, из условия о том, что на плоскости найдутся точки как черного, так и белого цвета, следует, что разноцветный отрезок обязательно появится на ней.
4. Исследуйте предыдущие вопросы для фигур с заданными параметрами. Например, отрезок с длиной стороны 1; равнобедренный треугольник с длиной боковой стороны 1; прямоугольник с длиной одной из сторон 1; прямоугольник, являющийся квадратом; и другие.
5. Предложите свои фигуры из $n \geq 3$ вершин и ответьте про них на следующие вопросы: "гарантированно ли найдётся подходящая фигура с одноцветным множеством вершин при раскраске плоскости в $m \geq 2$ цветов", "гарантированно ли найдётся подходящая фигура с разноцветным множеством вершин при раскраске плоскости в n цветов".

Задача №2 Волшебный отель

В бесконечном отеле есть комнаты под номерами $1, 2, 3, \dots$ и так далее. Сейчас они все заняты постояльцами. Выяснилось, что скоро приезжает известный ученый, которому необходимо выделить свободную комнату. На следующей неделе придет проверка из столицы, поэтому владельцу отеля, Волшебнику, срочно нужно сделать так, чтобы все гости были довольны и никого не нужно было бы просить покинуть отель. Волшебник не растерялся и попросил всех постояльцев всего лишь переехать в комнату, номер которой на единицу больше номера их текущей комнаты.

Тем самым постоялец из комнаты n должен переехать в комнату с номером $n + 1$. Вся процедура была завершена буквально за час. На следующий день известный ученый поселился в свободную комнату с номером 1, а проверка из столицы прошла успешно.



1. Появились новости о том, что скоро в отель приезжает 100 человек. Получится ли у Волшебника поселить их (каждого человека в отдельную комнату), не заставляя никого уезжать из отеля?
2. На следующей неделе в отель приезжает бесконечный автобус школьников, за каждым из которых закреплён его посадочный номер n : есть школьник на первом сиденье, на втором, и так далее. Помогите Волшебнику поселить всех школьников в отеле.
3. Скоро в отель приезжает 100 бесконечных автобусов со школьниками! За каждым школьником закреплён номер M его автобуса и номер n его посадочного сиденья в автобусе M . Помогите Волшебнику заселить всех школьников в отель.
4. Беда! В отель приезжает бесконечное число автобусов, в каждом из которых сидит бесконечное число школьников! Сможет ли Волшебник заселить их всех в свой отель?
5. Скоро в отель приезжают математики. За ними не закреплено никакое место в автобусе, зато у каждого из них есть уникальная любимая несократимая дробь вида n/m , где $n, m \in \mathbb{N}$ (т.е. дробь, кодирующая положительное рациональное число), причем каждой такой дроби соответствует некоторый (уникальный) математик, — именно на эти уникальные дроби и ориентируется Волшебник. Сможет ли он поселить всех математиков в свой отель?
6. В отель приехали любители теории графов. Графом мы называем конечное множество V вершин графа, в котором указано, какие пары вершин $(u, v) \in V \times V$ соединяются между собой ребром ("какие рёбра соседствуют друг с другом"). Все ребра образуют множество $E \subseteq V \times V$, граф хранит информацию о паре (V, E) . У каждого любителя теории графов есть уникальный граф, вершины которого занумерованы какими-то натуральными числами (формально, $V \subseteq \mathbb{N}$), причем каждый такой граф соответствует некоторому человеку. Сможет ли Волшебник поселить любителей теории графов в своём отеле?
7. В отель приехали лингвисты. У каждого лингвиста есть уникальное любимое слово из букв русского алфавита, причем каждое такое слово соответствует некоторому лингвисту. Сможет ли Волшебник поселить всех лингвистов в своём отеле?
8. В отель приехали более продвинутые лингвисты. Их уникальные любимые слова составлены из букв бесконечного межгалактического алфавита. Для восприятия сложной структуры получающегося языка разрешается представлять себе, что каждая буква этого алфавита кодируется некоторым натуральным числом. Тем самым можно сказать, что, например, 1 96 12 3 является словом языка. Сможет ли Волшебник заселить в свой отель всех продвинутых лингвистов?
9. На следующей неделе в отель приезжает группа из бесконечного числа программистов. Каждый из них имеет уникальный любимый двоичный код из бесконечного числа нулей и единиц. Например, есть программист с любимым кодом 010101... и программист с кодом 110110110..., причем каждому коду соответствует некоторый программист. Сможет ли Волшебник заселить всех программистов в свой отель?

Задача №3 Через 100 метров поверните направо

Рассмотрим множество тех точек на плоскости, которые имеют целые координаты — будем называть это множество $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. *Маршрутом* в $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ будем называть такую конечную последовательность $x_0 \dots x_n$ точек этого множества, что x_{k+1} — одна из четырёх точек, находящихся от x_k на расстоянии 1. Длина маршрута $x_0 \dots x_n$ равна n .

Между двумя точками из $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ можно найти *кратчайшие маршруты* — те, концы которых находятся в этих точках и которые имеют наименьшую длину.

Будем говорить, что набор точек $a_0 \dots a_m$ *привязывает* маршрут $x_0 \dots x_n$, если выполнены два условия:

- Данные точки лежат на указанном маршруте, причём в порядке возрастания номеров;
- Участок указанного маршрута между точками a_k и a_{k+1} является кратчайшим маршрутом между этими точками.

Идея привязывающего набора точек очень проста и может быть проиллюстрирована, скажем, на карте города: отмеченные кругами точки на **втором рисунке** привязывают чёрный маршрут на этом рисунке.

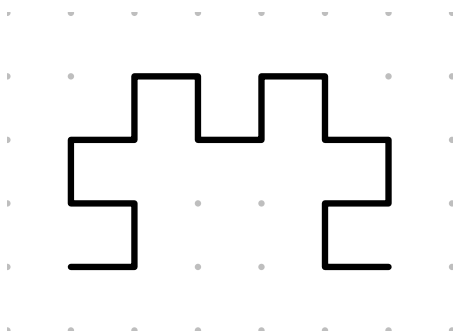


Рис. 1: Пример маршрута в $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

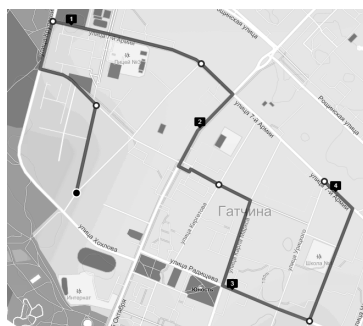


Рис. 2: Пример привязывающего набора

1. Придумайте маршрут длины 100 в $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, единственный привязывающий набор для которого — все его точки. Насколько различными могут быть такие маршруты?
2. Пусть маршрут длины n не ходит дважды по одному ребру (то есть, в последовательности его вершин не встречается $\dots XYX \dots$). Докажите, что такой маршрут может быть привязан набором из не более чем $\frac{n}{2} + 1$ своих точек.
3. Построить наименьший по размеру привязывающий набор для маршрута на первом рисунке и доказать, что привязывающих наборов меньшего размера не бывает.

В последующих пунктах задачи мы будем для простоты рассматривать только маршруты, которые не ходят дважды по одному ребру.

4. Верно ли, что всякий привязывающий набор для маршрута $x_0 \dots x_n$, из которого нельзя выкинуть точку так, чтобы он остался привязывающим (такие наборы называются *минимальными по включению*), непременно является наименьшим по размеру?
5. Как на данном маршруте выбрать точки, образующие минимальный по размеру привязывающий набор? Предложите явную процедуру.
6. Аналогично с множеством $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ точек на плоскости можно ввести множество $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ точек в трёхмерном пространстве. Распространите решённые вами пункты на маршруты в этом множестве. Обобщается ли придуманная вами в пункте 5 процедура?
7. Пусть теперь точки в привязывающем наборе могут быть не только вершинами маршрута, но и серединами его отрезков. Каким в таких условиях будет размер наименьшего привязывающего набора?

Задача №4 За решёткой

1. На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольник размера 4×6 , как на рисунке [3](#). Сколько из него можно выделить прямоугольников, вершины которых находились бы в узлах сетки, а стороны были бы горизонтальными и вертикальными? Например, для аналогичного прямоугольника размера 2×2 ответом является число 9.
2. А сколько прямоугольников можно выделить из прямоугольника размера $n \times m$ на клетчатой бумаге?

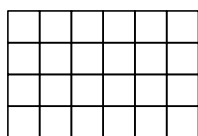


Рис. 3: Прямоугольник 4×6

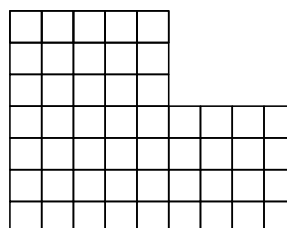


Рис. 4: Уголок

3. Сколько прямоугольников можно выделить из уголка на рисунке [4](#)?
4. Сколько прямоугольников можно выделить из уголка произвольного размера, как на рисунке [5](#)?

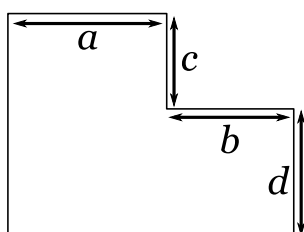


Рис. 5: Уголок произвольного размера

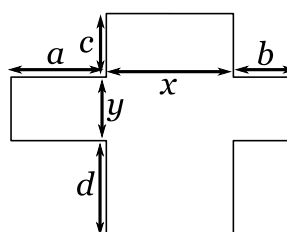


Рис. 6: Крестик произвольного размера

5. Сколько прямоугольников можно выделить из «крестика» произвольного размера, как на рисунке [6](#)?

В дальнейших пунктах задачи мы будем рассматривать бумагу с треугольными клетками — разлинованную так, что на ней образуется сетка из правильных треугольников.

6. Сколько правильных треугольников можно вырезать по линиям сетки из правильного треугольника с длиной стороны 4, как на рисунке [7](#)?
7. Сколько правильных треугольников можно вырезать по линиям сетки из правильного треугольника с длиной стороны n ?

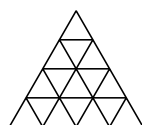


Рис. 7: Правильный треугольник с длиной стороны 4

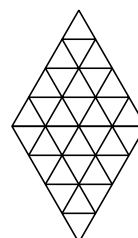


Рис. 8: Ромб с длиной стороны 4

8. Сколько ромбов можно вырезать по линиям сетки из ромба с длиной стороны 4, как на рисунке [8](#)?
9. Сколько ромбов можно вырезать по линиям сетки из ромба с длиной стороны n ?
10. Рассмотрите свои обобщения и иные направления в данной задаче.

Задача №5 Наперегонки

На бесконечной влево и вправо клетчатой ленте двое игроков играют в игру. Тот, кто ходит первый, ставит за один ход крестик, а второй — несколько ноликов. Задача первого игрока состоит в том, чтобы собрать какой-нибудь набор из крестиков, в котором соседние крестики располагаются на одном и том же расстоянии друг от друга (такой набор будем называть правильным). Например, на рисунке ниже первый игрок смог собрать правильный набор из трёх крестиков



Задача второго игрока состоит в том, чтобы помешать ему. Игра заканчивается через n шагов (считается, что за один шаг оба игрока делают по одному ходу).

1. Пусть за один ход второй игрок может поставить $k = 2$ нолика.
 1. Верно ли, что если второй игрок будет играть достаточно хорошо, за $n = 3$ шага первый игрок не сможет собрать правильный набор из $m = 3$ крестиков?
 2. Верно ли, что если играть достаточно долго (некоторое число n шагов), то первый игрок гарантированно сможет собрать правильный набор из $m = 3$ крестиков и победить?
 3. Верно ли то же самое для $m = 4$ крестиков?
 4. Верно ли то же самое для $m = 5$ крестиков?
2. Исследуйте предыдущие вопросы в том случае, когда второй игрок за один ход ставит
 1. $k = 3$ ноликов;
 2. какое-то фиксированное число $k \in \mathbb{N}$ ноликов.
3. Какое наибольшее число правильных наборов из $m = 3$ крестиков может собрать первый игрок, если второй игрок за один ход ставит $k = 2$ нолика, а игра продолжается
 1. $n = 6$ шагов;
 2. $n = 10$ шагов;
 3. некоторое натуральное n шагов?

Дайте приблизительный ответ и постарайтесь уточнить его.

4. Предложите собственные развития этой задачи и изучите их. Например, попытайтесь обобщить результат первого пункта для больших m .

Задача №6 Фестиваль языков

На международном фестивале языков обмениваются знаниями о разных языках и изучают их. В этом году состоится уже шестой ($n = 6$) по счёту фестиваль. Каждый год на него приглашается, вообще говоря, бесконечное число людей из разных стран, которые знают ровно один язык — свой родной. Кроме того, на n -ом фестивале собирается ровно n различных языков.

Участники фестиваля были пронумерованы целыми числами, распределены по группам и отправлены в комнаты, соответствующие их родному языку (каждая комната представлена одним языком), в которых они были посажены на стулья согласно их нумерации. На рисунке ниже показана бесконечная схема мероприятия: числа соответствуют людям (и стульям), а строчки — комнатам (и языку). Тем самым, каждое целое число задаёт некоторого человека.

...	-24	-18	-12	-6	0	6	12	18	...
...	-23	-17	-11	-5	1	7	13	19	...
...	-22	-16	-10	-4	2	8	14	20	...
...	-21	-15	-9	-3	3	9	15	21	...
...	-20	-14	-8	-2	4	10	16	22	...
...	-19	-13	-7	-1	5	11	17	23	...

В комнате, соответствующей языку, всех желающих обучают этому языку и рассказывают о его особенностях. Каждый участник фестиваля имеет право взять на себя роль организатора и перераспределить людей между комнатами. А именно, организатор m отправляет человека, сидящего в данный момент на стуле x , на стул под номером xt . Каждый человек на фестивале побывал организатором.

1. Известно, что через некоторое время после того, как очередной человек выполняет роль организатора, тренинг заканчивается, все люди возвращаются на свои стулья, и выбирается новый организатор.

1. Докажите, что если человек ходил учить некоторый язык, то и все его соседи по комнате ходили в тот же момент учить тот же самый язык.
 2. В конце дня для практики в виде реального общения участники разбились на группы следующим образом: два человека в одной группе, если каждый из них учил язык другого. Схематично опишите разбиение людей на группы (при $n = 6$).
 3. В алгебраических терминах укажите, когда два человека $x, y \in \mathbb{Z}$
 - (a) имеют один и тот же родной язык
 - (b) в конце дня попадают в одну группу
 4. Исследуйте предыдущие вопросы для других фестивалей: на n -ом фестивале людей распределяют по комнатам с помощью бесконечной влево и вправо лентой с n строчками, аналогичной ленте выше. Все дальнейшие вопросы этой задачи также относятся к общему случаю $n \in \mathbb{N}$.
2. Участник $x \in \mathbb{Z}$ фестиваля называется продвинутым, если на нём он учил все языки.
1. При $n = 6$ выясните, в каких комнатах находятся продвинутые участники. Докажите, что на каждом фестивале $n \in \mathbb{N}$ все продвинутые участники попадают в одну группу.
 2. Что можно сказать про число $n \in \mathbb{N}$, если все участники фестиваля n оказались продвинутыми?
 3. Какие языки ходили учить люди, когда роль организаторов брали на себя продвинутые участники фестиваля?
 4. Выясните, как по данному числу n понять, сколько групп образуется на фестивале. Закодируйте получающиеся группы какой-нибудь алгебраической характеристикой числа n . Как в терминах Вашего кодирования понять по данным людям $x, y \in \mathbb{Z}$, ходил ли x учить родной язык человека y ?
3. Группу будем называть дружной, если каждый её участник обладает тем свойством, что при выполнении роли организатора он отправляет людей из своей группы на стулья людей своей же группы.
1. Докажите, что каждый год $n \in \mathbb{N}$ группа, в которой состоят продвинутые участники фестиваля, является дружной.
 2. Какие группы являются дружными на фестивале $n = 12$? А на фестивале $n = 60$?
 3. Участник фестиваля называется ленивым, если в тот момент, когда он выполняет роль организатора, все участники из его группы (в том числе он сам) остаются в своих комнатах. В каких группах есть ленивые люди?
4. Уберём условие п. 1 о том, что все люди возвращаются на свои стулья после завершения тренинга. Пусть $x \in \mathbb{Z}$ — участник фестиваля. Отправим его работать организатором много раз подряд. Будем говорить, что те языки, учить которые он ходил во время работы, ему нравятся.
1. Каким людям нравится свой родной язык?
 2. Будем говорить, что группа пребывает в гармонии (или "является гармоничной"), если в ней существует участник, которому нравятся все языки этой группы. Как связаны свойства группы "быть гармоничной" и "быть дружной"?
 3. Опишите те группы, которые являются гармоничными.

Задача №7 Сам себе режиссёр

1. Придумайте десятизначное число в десятичной системе счисления, такое что его первая (старшая) цифра равна количеству нулей в его записи, вторая цифра равна количеству единиц в его записи, ..., последняя цифра равна количеству девяток в его записи.
2. Для всех систем счисления с основанием $n \geq 7$ опишите решение аналогичной задачи: найти n -значное число такое, что его старшая цифра равна количеству нулей в его записи, ..., его n -ая цифра равна количеству цифр $n - 1$ в его записи.
3. Есть ли другие решения этой задачи в десятичной системе счисления? Переносятся ли эти решения на другие системы счисления?
4. Есть ли вообще другие решения этой задачи в системах счисления с основанием $n \geq 7$?
5. Существуют ли решения аналогичной задачи для двоичной и троичной систем счисления?
6. Сколько решений этой задачи в системе счисления с основанием $n = 4$?
7. Есть ли решения этой задачи в системах счисления с основаниями 5, 6?
8. Как изменятся ответы в предыдущих пунктах, если вместо прежней мы рассмотрим другую, «развёрнутую» задачу:

Придумать n -значное число в системе счисления с основанием n такое, что его младшая цифра равна количеству нулей в его записи, цифра в его предпоследнем разряде равна количеству единиц в его записи, ..., цифра в его старшем разряде равна количеству цифр $n - 1$ в его записи?

Задача №8 Спартакиада

На спартакиаде проводят соревнование по прыжкам в длину. Выбирается подходящее поле для прыжков, оно расчерчивается на квадраты, и устанавливаются следующие правила: требуется прыгнуть в каждый квадрат ровно по одному разу. Задача состоит в том, чтобы при каждом прыжке между квадратами преодолевать как можно большее расстояние: в личный зачёт каждому спортсмену идёт длина наименьшего прыжка.

1. Поле представляет из себя полосу из квадратиков $1 \times n$. Квадратики последовательно занумерованы натуральными числами от 1 до n . Спортсмен начинает в квадрате с номером 1. Например, если при $n = 5$ человек прыгает по квадратам в порядке 1, 3, 5, 2, 4, то в зачёт ему идёт 2 балла.

1. Сколько различных возможностей для прыжков есть у спортсменов на поле $1 \times n$?
 2. При $5 \leq n \leq 7$ найдите максимальное число очков, которое могли получить спортсмены на соревновании, и опишите способ, по которому нужно прыгать, чтобы набрать это число.
 3. Исследуйте предыдущий вопрос на произвольной полоске $1 \times n$.
2. На следующем соревновании прыжки спортсменам запрещается прыгать так, чтобы их прыжок имел чётную длину. Например, при $n = 5$ разрешённой последовательностью прыжков является 1, 2, 5, 4, 3, а последовательность из предыдущего пункта теперь является запрещённой.

1. Какое наибольшее число очков могли получить спортсмены при $n = 8$?
2. Исследуйте предыдущий вопрос в общем случае.
3. Полоску $1 \times n$ заменили на ленту, которая разбита на n квадратов, проходит вдоль экватора и огибает всю планету. Соревнование проходит без ограничений на прыжки. Например, при $n = 5$ человек может прыгать по квадратам в одном направлении экватора в порядке 1, 4, 2, 5, 3, обогнув планету два с половиной раза; за такие прыжки в зачёт ему пойдёт 3 балла. Исследуйте вопрос о получении наибольшего числа очков на соревновании (ответ дайте в зависимости от n).

4. Исследуйте основной вопрос задачи на других полях, разбитых на квадратики, и при других ограничениях на прыжки. Например, введите ограничение, при котором спортсмены могут прыгать только на длину, делящуюся на 3. В случае замены поля, скажем, на прямоугольник $n \times m$, потребуется уточнить, как именно оцениваются прыжки спортсменов. Мы предлагаем на таком поле вычислять длину прыжка следующим образом: определить координаты каждого квадрата (левый нижний имеет координаты $(0, 0)$, его правый сосед — $(1, 0)$, а верхний — $(0, 1)$, и так далее), а затем длиной прыжка из квадрата (a, b) в квадрат (x, y) считать число $|x - a| + |y - b|$.

Задача №9 Разрезания

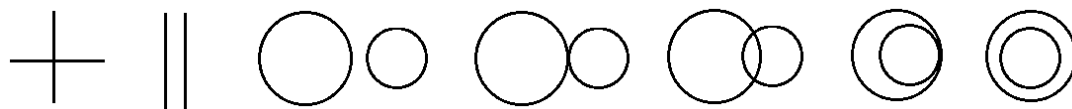
В вашем распоряжении есть нож, которым можно разрезать некоторые объекты. По одному и тому же контуру запрещается делать разрез несколько раз. Кроме того, кусочки разрезаемого объекта должны оставаться неподвижны — перемещать их нельзя. Есть два вида разреза:

- (1) вдоль прямой линии;
- (2) вдоль окружности ненулевого радиуса.

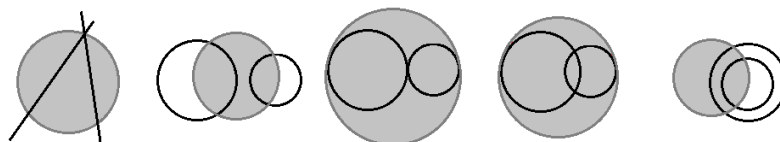
Основными объектами, над которыми будут проводиться разрезания, являются:

- (D) диск, т.е. круг вместе с граничной окружностью;
- (P) бесконечная плоскость.

Получается четыре вида разрезаний. Для $k = 1, 2$ через $Disk_k(n)$ и $Plane_k(n)$ обозначим множество конфигураций разрезаний диска и плоскости, которые состоят ровно из n разрезов, являющихся прямыми линиями при $k = 1$ и окружностями при $k = 2$. Например, на рисунках ниже описаны все две конфигурации из $Plane_1(2)$ и все пять конфигураций из $Plane_2(2)$. Тем самым двумя прямыми плоскость можно разрезать на 4 или 3 части, а окружностями — на 3, 3, 4, 3, 3 частей.



Ниже показаны некоторые конфигурации разрезов диска двумя прямыми/окружностями на 3, 3, 4, 5, 3 частей.



Мы интересуемся, какое число частей может получиться с помощью n разрезов.

1. Для конфигурации $C \in Disk_k(n) \cup Plane_k(n)$ обозначим через $P(C)$ число кусочков, на которые C делит круг/плоскость.

1. Для $k = 1, 2$ опишите все элементы в множествах $Disk_k(2)$ и $Plane_k(3)$.
2. Какое минимальное и максимальное значение может принимать $P(C)$ при $n = 1, 2, 3, \dots$? Для каждого из четырёх видов разрезаний дайте общий ответ, зависящий только от числа разрезов n .
3. Верно ли, что при всех n в каждом из четырёх видов разрезаний диск/плоскость можно разрезать на любое число частей, лежащее в пределах от минимального до максимального?

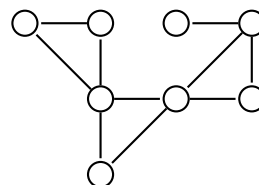
2. Для конфигурации $C \in Disk_k(n)$ обозначим через $I(C)$ число пересечений контуров разрезов, которые находятся внутри диска (не на границе).

1. Предположим, что разрезы в C проведены так, что никакие три контура не пересекаются в одной точке и что никакие два контура не пересекаются на границе диска. При $k = 1, 2$ как связаны между собой числа $P(C)$ и $I(C)$?

2. Как изменятся закономерности, если отбросить предположения о пересечениях контуров?
3. Свяжите числа $P(C)$ и $I(C)$ с количеством получающихся на C отрезков/дуг окружностей, соединяющих точки пересечения контуров.
3. Возьмём сферу в пространстве (шар без внутренности), которую будем разрезать ножом вдоль каких-то плоскостей. Это то же самое, что и разрезать сферу по контурам окружностей на ней.
 1. Исследуйте получающиеся конфигурации разрезов с n окружностями.
 2. Исследуйте конфигурации разрезов диска и плоскости, которые состоят и из окружностей, и из прямых, суммарное количество которых равно n .
 3. Будем проводить разрезы плоскости по окружностям, проходящим через одну и ту же точку. Исследуйте получающиеся конфигурации разрезов.
 4. Будем проводить разрезы сферы по окружностям, проходящим через одну и ту же точку. Исследуйте получающиеся конфигурации разрезов.
4. При фиксированном числе разрезов n выясните, на какое число частей невозможно разрезать диск/плоскость/сферу. Для начала докажите, что с помощью n прямых плоскость невозможно разрезать на $1, 2, \dots, n-1, n, n+2, n+3, \dots, 2n-1$ частей. Можно ли разрезать n прямыми плоскость на $2n+1, 2n+2, \dots, 3n-2, 3n-3$ частей?
5. Исследуйте аналогичные вопросы задачи в одномерном и трехмерном случаях, в которых разрезаются отрезок, прямая, шар и пространство. Предложите собственные развития этой задачи или обобщения полученных результатов и изучите их.

Задача №10 Да будет свет

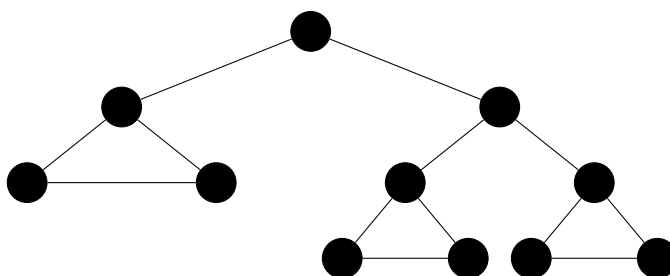
Рассмотрим некоторый граф из вершин и рёбер, как на рисунке справа. В каждой вершине этого графа расположен генератор электричества. Разрешается выбрать любой из них и запустить электричество из него в разные стороны вдоль рёбер (оно распространяется непрерывно со скоростью 1 ребро в секунду). Когда электричество доходит по некоторому ребру до нового генератора, оно запускает его и порождает цепную реакцию, направляющую ток в остальные рёбра.



Если в точку на графе (на ребре или в вершине) приходит ток, она считается испорченной — больше по ней электричество не пройдёт. Электричество на графе полностью пропадает в двух случаях: когда он приходит в некоторую испорченную точку и когда он приходит в какую-то точку с двух разных сторон (происходит замыкание). После замыкания можно выбрать новый генератор и включить его.

Нас интересует, как устроены ручные включения генераторов на произвольном графе, приводящие к порче каждой точки этого графа. Все графы в этой задаче предполагаются связными (т.е. такими, что между любыми двумя его вершинами существует путь по рёбрам).

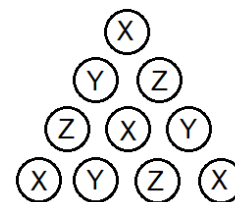
1. За какое наименьшее число ручных включений генераторов можно покрыть электричеством весь граф на рисунке выше?
2. Исследуйте аналогичный вопрос для графа ниже



3. Опишите те графы, в которых все точки могут быть испорчены всего за одно нажатие генератора.
4. Приведите пример графа, генераторы в котором можно активировать так, что все вершины окажутся испорченными, а некоторые точки на рёбрах — нет.
5. Верно ли, что в любом графе можно по-очереди запускать генераторы так, чтобы электричество покрывало (т.е. испортило) каждую его точку?
6. Существует ли граф, который нельзя покрыть одним ручным включением генератора, но можно покрыть какими-то двумя включениями?
7. Существует ли граф, который нельзя покрыть одним, двумя, тремя, ..., $n - 1$ ручными включениями генератора, но можно покрыть какими-то n включениями? Дайте ответ для каждого $n \in \mathbb{N}$.
8. Существует ли граф, который нельзя покрыть одним ручным включением генератора, но можно покрыть любыми двумя включениями?
9. Существует ли граф, который нельзя покрыть одним или двумя ручными включениями генератора, но можно покрыть любыми тремя включениями?
10. Существует ли граф, который нельзя покрыть $1, 2, \dots, n - 1$ ручными включениями генератора, но можно покрыть любыми n включениями? Дайте ответ для каждого $n \in \mathbb{N}$.
11. Предложите собственные развития этой задачи и изучите их. Например, дайте какое-нибудь описание графам, которые могут быть покрыты за n ручных включений генераторов.

Задача №11 Математическая генетика

Геном инопланетной клетки состоит из трёх типов нуклеотидов: X, Y, Z . Нуклеотид — это элементарный кусочек генетической информации. В нашем приближении — просто буква. Гены инопланетян выстраиваются не спиралями, как у нас, а треугольниками, причём выполняется следующее правило: над соседними нуклеотидами одного типа стоит нуклеотид того же типа, а над соседними нуклеотидами разных типов — оставшегося типа. Оказалось, что клетки инопланетян обладают удивительными свойствами симметрии. Ученые приступили к их генерированию в лабораторных условиях. Сначала из n произвольных нуклеотидов формируется нижний ряд треугольника. Затем он достраивается слой за слоем в соответствии с правилом выше.



1. Для всех возможных комбинаций нижнего ряда из $n = 4$ нуклеотидов найдите тип нуклеотида, расположенного на вершине соответствующего треугольника (он называется старшим). Дайте наиболее компактный ответ на этот вопрос.
2. Решите аналогичную задачу при
 1. $n = 7$
 2. $n = 10$
 3. $n = 13$
 4. $n = 16$
 5. $n = 28$
3. Придумайте способ, по которому можно найти количество нуклеотидов старшего типа, зная лишь нижний ряд треугольника,
 1. при $n = 4$
 2. при $n = 7$
 3. в общем случае
4. Исследуйте вопрос о том, как связаны числа N, M, K , равные числу нуклеотидов в треугольнике типа X, Y, Z соответственно, с типами нуклеотидов из нижней строки.

Задача №12 Карточная алгебра

Рассмотрим колоду из n карт, карты которой занумерованы от 1 до n и имеют две стороны (белую и черную). Мы будем тасовать эту колоду из начального состояния (в котором все карты расположены белой стороной вверх по возрастанию номеров от самой верхней карты к последней нижней) с помощью разных операций (тасований).

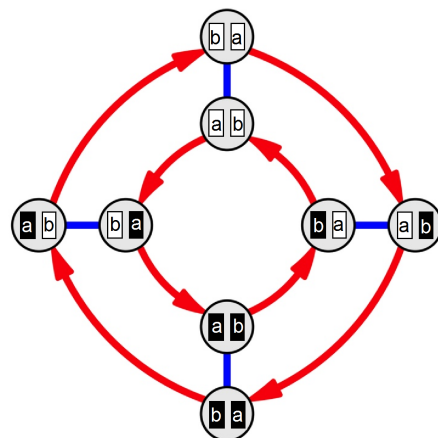
1. Обозначим через C_n множество всех расположений n карт в колоде, в которых карты занимают любые из n позиций белой или чёрной стороной вверх. Элементы множества C_n мы будем называть состояниями колоды. Например, существует восемь состояний колоды из двух карт: $ab, \bar{a}b, a\bar{b}, \bar{a}\bar{b}, ba, \bar{b}a, b\bar{a}, \bar{b}\bar{a}$. Здесь черта означает перевернут, буква a символизирует первую карту, а b — вторую. Найдите явную формулу для $|C_n|$.

2. Фиксируем число карт в колоде n (например, $n = 52$). Рассмотрим преобразования колоды из начального состояния следующих типов:

- (T) поменять местами любые две карты
- (U) переместить любую карту (кроме самой верхней) вверх через одну
- (B) переместить верхнюю (т.е. первую) карту в любое место в колоде
- $(S)_m$ поменять местами верхнюю карту с m -ой сверху картой
- (UU) выбрать любую карту, не являющуюся первой или второй сверху, и переместить её вверх через две карты
- $(R)_m$ выбрать m верхних карт и переместить полученную часть в самый низ колоды
- (C) перевернуть верхнюю карту
- (CA) перевернуть любую карту
- (CC) перевернуть две верхние карты и поменять их местами
- (O) перевернуть все карты, имеющие в данный момент нечётный номер в колоде
- (CD) перевернуть верхнюю карту и переместить её в самый низ

Мы интересуемся, какие состояния колоды можно получить с помощью этих преобразований. Для каждого из следующих наборов преобразований выясните, какие состояния колоды можно получить с помощью них, имея стартовую колоду: (T); (T) и (C); (U) и (C); (B); (B) и (C); $(S)_1, \dots, (S)_n$ и (C); (T) и (CC); (UU); (UU) и (C); $(R)_1$ и (CC); (T) и (O); (CD) и $(S)_2$; (UU) и (CD); $(R)_m$ для разных фиксированных m . Например, узнайте, сколько состояний так можно получить, в каком случае можно получить состояние, которое даёт $(S)_2$ из стартовой колоды, и т.д.

3. Пусть S — некоторый набор тасований колоды. Построим по нему граф $\Gamma = (V, E)$ с разноцветными рёбрами, вершинами которого являются состояния колоды ($V = C_n$). Из каждой вершины (состояний колоды) мы проведём ребро "цвета" $s \in S$ в вершину, которая задаёт состояние колоды, получающееся в результате применения тасования s к данному состоянию. Таким образом, такой граф имеет $|C_n|$ вершин и из каждой вершины выходит $|S|$ рёбер разных цветов. Например, ниже изображён такой граф для колоды из двух карт, в котором в качестве S выбрано множество всех преобразований типа (T) и типа (CD) (для удобства на рисунке рядом с каждой вершиной вместо двух синих рёбер, соответствующих (T), изображено одно синее ребро).



1. Нарисуйте такой граф для колоды из двух карт, в котором в качестве S выбрано множество всех преобразований типа (T) и типа (C).

2. Для наборов S из второго пункта задачи найдите количество компонент связности соответствующего графа. Какие графы получаются связными?
3. Выясните, какое наименьшее число тасований может быть в наборе S , граф которого является ным.
4. Выберем какое-нибудь тасование s и начнём применять его много раз к стартовой колоде. Для каких s верно, что в какой-то момент получится снова стартовая колода?
4. Пусть s — некоторое тасование стартовой колоды. Применим его. Говорят, что пара карт в процессе тасования была инвертирована (или что она "образует инверсию"), если до тасования они располагались в одном порядке (скажем, a ниже b), а после тасования — в другом (a выше b). Например, все тасования типа (T) имеют одну инверсию, (C) — ноль, а (UU) — две.
 1. Нарисуем граф, соответствующий набору S всех преобразований типа (U) и типа (CA) . Пусть s — какое-то тасование. Применим его к стартовой колоде и рассмотрим получающуюся вершину графа. Выясните, как связано количество инверсий тасования s и количество карт, лежащих черной стороной вверх, с расположением этой вершины.
 2. Исследуйте аналогичный вопрос о расположении вершины на графе, заданным набором S всех преобразований типов (T) и (CA) .
 3. Исследуйте аналогичный вопрос на графе, заданным набором S преобразований типов (UU) и (CA) .
5. Предложите свои собственные направления задачи и изучите их.

Состав жюри



Нежинский Владимир Михайлович

д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой геометрии РГПУ им. А.И. Герцена. Председатель жюри. Научные интересы: геометрия и топология, теория узлов.



Ильин Юрий Анатольевич

д.ф.-м.н., доцент кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ. Заместитель председателя жюри. Научные интересы: математическая физика. Возглавляет состав жюри с 2017 года



Иванов Сергей Олегович

к.ф.-м.н., старший научный сотрудник лаборатории "Современная алгебра и приложения". Научные интересы: алгебра, теория групп, алгебраическая топология



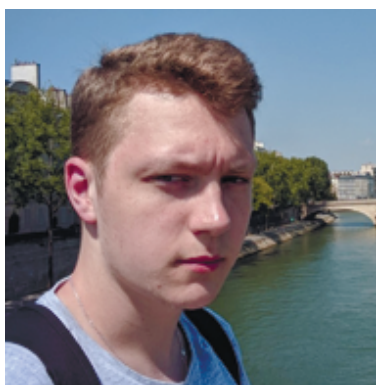
Колпаков Андрей Сергеевич

зам. декана факультета компьютерных технологий и информатики СПбГЭТУ "ЛЭТИ". Научные интересы: численное обращение преобразования Лапласа, гармонический анализ. Входит в состав жюри Санкт-Петербургского турнира юных математиков с 2015 года, в состав жюри Балтийского научно-инженерного конкурса - с 2014



Прокофьева Ирина Григорьевна

учитель математики ГБОУ СОШ 241. Ирина Прокофьева окончила Ленинградский государственный университет. Около 30 лет работала в различных авторских школах и гимназиях учителем математики в разных классах. Неоднократно награждалась грамотами Комитета по образования. Более семи лет является Председателем жюри секции учителей математики Балтийского научно-инженерного конкурса. Принимает участие в Турнире в качестве члена жюри с самого его основания.



Алексеев Илья Сергеевич

студент СПбГУ. Координатор Турнира с 2018 года. Будучи школьником, многократно участвовал в Санкт-Петербургском турнире юных математиков в 2014, 2015 и 2016 годах. Готовит команды международного Турнира юных математиков с 2017 года. Научные интересы: теория групп, геометрия и топология.



Семёнов Андрей

аспирант ПОМИ РАН. Входит в состав жюри международного и Санкт-Петербургского Турнира юных математиков с 2016 года. Научные интересы: теория групп, гомологическая алгебра, математическая физика.



Рагозин Илья Андреевич

выпускник СПбГУ. Инженер-исследователь немецкого научно-исследовательского общества СПбГУ-DFG.



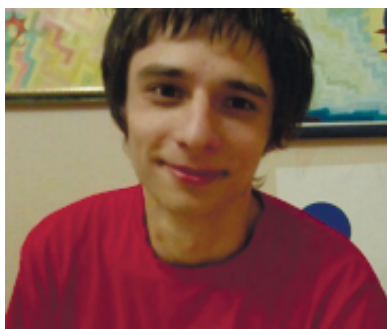
Леонтьева Екатерина

студентка СПбГУ. Научные интересы: теория вероятностей и математическая статистика.



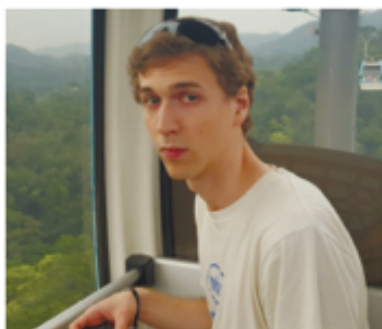
Чепуркин Константин Михайлович

аспирант ПОМИ РАН. Является одним из основателей Санкт-Петербургского Турнира юных математиков. Научные интересы: алгебраическая геометрия. В 2016 году принимал участие в международном Турнире юных математиков в качестве члена жюри, а в 2009-2015 годах являлся членом жюри на Балтийском научно-инженерном конкурсе.



Артюшин Денис

аспирант ПОМИ РАН. Научные интересы: алгебра, теория чисел, цифровая обработка сигналов. Около 6 лет занимается проведение факультативов и курсов по математике для школьников. Последние два года принимает участие в Турнире юных математиков в качестве члена жюри.



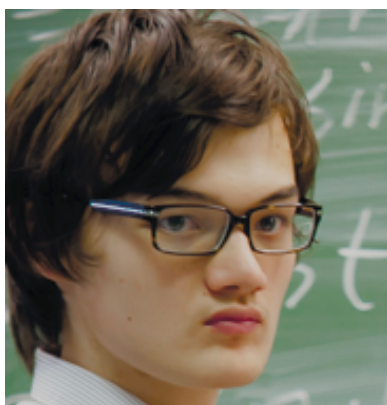
Зайковский Анатолий

аспирант СПбГУ. Входит в состав жюри турнира с 2017 года.



Киселёв Николай Андреевич

аспирант кафедры гидроаэромеханики СПбГУ. Не один раз руководил командами на международном Турнире юных математиков в 2012-2013 годах. Входит в состав жюри Санкт-Петербургского Турнира с 2016 года.



Хегай Артём

студент СПбГУ



Варганов Евгений Вячеславович

аспирант СПбГУ. Будучи школьником, многократно участвовал в турнирах юных математиков в Беларуси и Франции. Входит в состав жюри турнира с 2017 года.



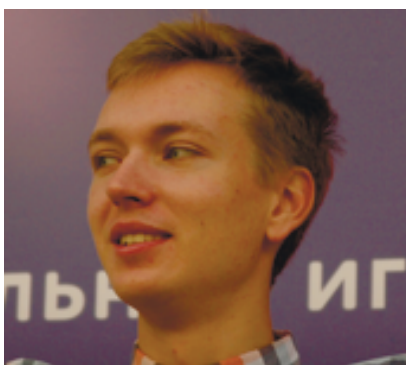
Боровицкий Вячеслав

аспирант ПОМИ РАН. Сотрудник лаборатории имени П.Л.Чебышёва.



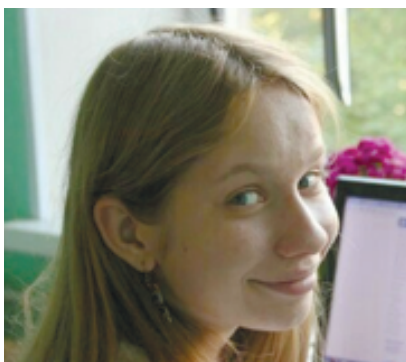
Клеверов Максим

студент СПбГПУ



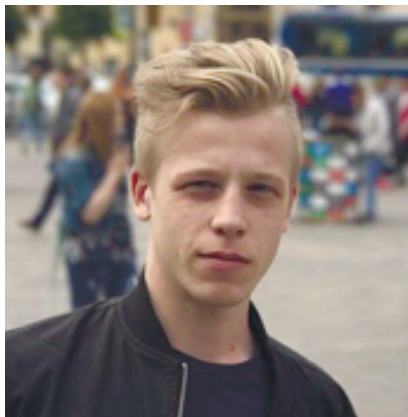
Михайлов Илья Тимофеевич

студент СПбГУ



Леонова Екатерина Олеговна

студентка СПбГУ. Участвовала в Санкт-Петербургском турнире юных математиков в 2015 и 2016 годах. С 2018 года входит в состав жюри.



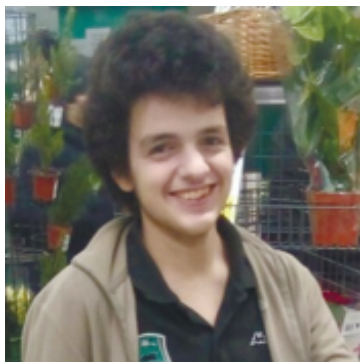
Куликов Пётр Алексеевич

студент СПбГУ



Золотарёв Егор Владимирович

студент СПбГУ



Айвазян Аршак Владимирович

студент СПбГУ. Как говорит Аршак, Турнир юных математиков - это единственная математическая олимпиада, командное соревнование, участие в которой похоже на то, чем действительно занимаются математики. Тексты задач и участники Турнира - это его главные её достоинства. Научные интересы: алгебра, геометрия, дискретная математика, программирование. Любая работа в продуктивность работы на всех этапах



Баркарь Алиса Георгиевна

студент СПбГУ. Участвовала в организации летних физических лагерей, три года занимается преподаванием математики. Увлекается Computer Science и биоинформатикой. Участие в качестве члена жюри Турнира юных математиков - это новый опыт для неё.



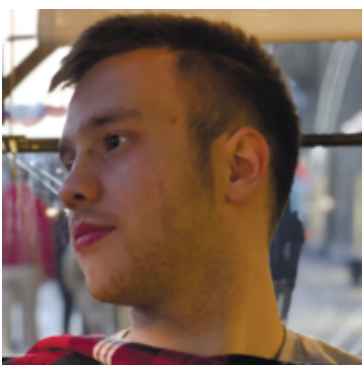
Золотов Борис Алексеевич

студент СПбГУ. В прошлом участник многочисленных турниров матбоёв, сейчас — руководитель команд школьников на различные турниры. Автор задач и организатор олимпиады «Математика НОН-СТОП» с 2016 года. Научные интересы: логика, теория доказательств, TCS.



Богданов Иван Михайлович

студент СПбГУ. Участвовал в Санкт-Петербургском, Международном и Республиканском турнирах юных математиков в 2014 и 2015 годах, руководил командами школьников в последние годы. Научные интересы: теория вероятностей, теория случайных процессов и теория мартингалов



Васильев Константин Дмитриевич

студент СПбПУ. Участвовал в Санкт-Петербургском турнире юных математиков в 2015 году. Научные интересы: алгоритмы и структуры данных, вычислительная математика, теория вероятностей и математическая статистика.



Фиалковский Данил Романович

студент СПбГУ. Участвовал в Санкт-Петербургском турнире юных математиков в 2014 и 2015 годах.



Предтеченский Дмитрий Викентьевич

студент СПбГЭТУ. Занимается сборкой опытного образца инновационного музыкального синтезатора. Преподает программирование микроконтроллеров в 8 классе математической школы. Участие в Турнире юных математиков в качестве члена жюри - это новый опыт для него.



Михайловский Дмитрий Владимирович

студент СПбГУ. Участвовал в Санкт-Петербургском турнире юных математиков в 2016 и 2017 годах.



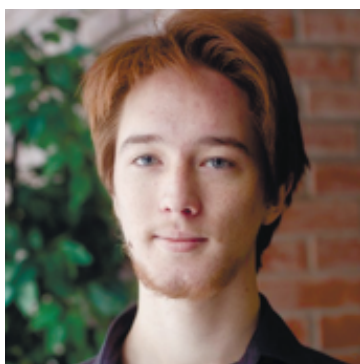
Сердюков Александр Александрович

студент НИУ ИТМО. Участвовал в Санкт-Петербургском турнире юных математиков в 2017 году.



Плаксин Даниил

студент СПбПУ. Участвовал в Санкт-Петербургском Турнире юных математиков в 2015 году и в международном турнире юных математиков в 2016 году. Научные интересы: теория вероятностей, дискретная математика, машинное обучение.



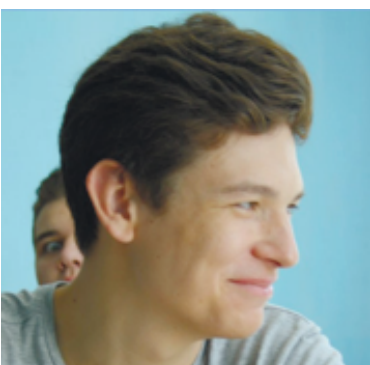
Вагнер Максим Владимирович

студент НИУ ИТМО. Участвовал в Санкт-Петербургском турнире юных математиков в 2015 и 2016 годах. Любая работа в продуктивность работы на всех этапах



Тодоров Евгений

студент СПбПУ. Будучи школьником, участвовал в Санкт-Петербургском Турнире юных математиков. Имеет опыт руководства командами Санкт-Петербургского и республиканского турниров юных математиков (Беларусь). Преподает в математической школе 6 и 7 классам. Научные интересы: Аналитическая геометрия, теория динамических систем.



Соликов Павел Дмитриевич

студент ВШЭ. Участвовал в международном турнире юных математиков в 2016 году

Правила Турнира

Регистрация команд и окончательные материалы исследований

На регистрации 29 ноября каждая команда должна сдать в электронном виде материалы по не менее чем 6 задачам. Оцениваться будут только те решения, которые команда выберет на жеребьёвке в одном из туров. За каждым участником команды закрепляется не менее двух задач так, чтобы каждая задача была закреплена за ровно одним участником. Основываясь на этом закреплении, участники каждой команды разделяются на нулевом туре и распределяются по разным комнатам; каждому человеку на нулевом туре выдают условия, соответствующие закреплённым за этим человеком задачам.

Структура турнира

Турнир состоит из нулевого тура, двух отборочных туров и финала. В первый день Турнира проводится нулевой тур – письменный тур, решение дополнительных вопросов по теме предложенных задач. Все участники Турнира разделяются на 6 групп так, чтобы никакие два человека из одной команды не писали нулевой тур в одной комнате. Задания письменного тура раздаются участникам непосредственно перед его началом в запечатанных конвертах. Каждая задача состоит из 5 пунктов. Продолжительность нулевого тура – 2 часа. Участие руководителей команды на данном этапе Турнира не допускается. По результатам нулевого тура каждая команда получает личные коэффициенты (по одному на каждую из 12 задач), которые вычисляются по формуле $C_i = 0.2 \cdot N_i$, где N_i – количество пунктов, решённых командой по задаче i . Числа C_i тайно сообщаются командам во время оглашения общих итогов нулевого тура. Они играют роль коэффициентов за доклад по задачам в каждом бое, включая финальный бой. Эти коэффициенты не влияют на итоговый рейтинг команды в Турнире после отборочных боёв, на основе которого формируется состав финального боя. В каждом отборочном раунде команды делятся на 4 группы. В финале 8 команд-победителей разделяются на две группы. *Математический бой* – главная составная часть турнира юных математиков. Под математическим боем понимается организованная дискуссия нескольких команд, в которой каждая участвующая команда поочередно выступает в качестве докладчика своих результатов, оппонента по выступлению докладывавшей команды и рецензента, оценивающего качество дискуссии двух других команд. Команды, участвующие в математическом бое, называются *участниками боя*. Математический бой состоит из нескольких раундов, в каждом из которых обсуждается одна задача, отличная от задач других раундов. Количество раундов совпадает с числом команд, участвующих в этом бое. В каждом раунде команда-участник исполняет только одну из ролей: Докладчика (Д), Оппонента (О), Рецензента (Р) или Наблюдателя (Н). Оппонент, Рецензент и Наблюдатели называются *оппонирующими* командами (участниками). Регламент действий в каждом раунде выглядит следующим образом:

Обязательные действия		
1	Перерыв. Проветривание помещения. Совещание жюри боя. Подготовка Докладчика к докладу	10 мин.
2	Выступление Докладчика с докладом	до 10 мин.
3	Вопросы Оппонента Докладчику и ответы Докладчика, выступление Оппонента, ответ Докладчика на выступление Оппонента	до 5 мин.
4	Вопросы Рецензента Докладчику и Оппоненту, ответы Докладчика и Оппонента, выступление Рецензента	до 3 мин.
Необязательные действия		
6	Вопросы и выступления Наблюдателя либо вопросы и выступления первого Наблюдателя (Н1) (для пятикомандного боя)	до 2 мин.

	Вопросы и выступления второго Наблюдателя (Н2) (для пятикомандного боя)	до 2 мин.
7	Дополнительное выступление Рецензента	до 2 мин.
8	Дополнительное выступление Оппонента	до 2 мин.
9	Заключительное слово Докладчика	до 2 мин.
10	Вопросы и замечания жюри, ответы участников боя	до 7 мин.
Итого, время одного раунда вместе с перерывом		не более 45 мин.

В основном случае четырехкомандного боя порядок смены ролей, исполняемых командами в последовательных раундах, определяется следующей *схемой боя*.

Команды	Раунды			
	1	2	3	4
Команда 1	Д	Н	Р	О
Команда 2	О	Д	Н	Р
Команда 3	Р	О	Д	Н
Команда 4	Н	Р	О	Д

Этот порядок задается циклической перестановкой в ряду «Д, Н, Р, О». Если в бое участвует пять команд, то в каждом раунде присутствуют два Наблюдателя (Н1 и Н2), а в случае трехкомандного боя Наблюдателей нет. Порядок смены ролей команд в таких боях задается циклической перестановкой в рядах «Д, Н2, Н1, Р, О» и «Д, Р, О» соответственно. Порядок выступления команд в бое и обсуждаемые задачи определяются путем жеребьевки.

Жеребьевка

Жеребьевка боя проводится в два этапа. Для непосредственного участия в ней команды, входящие в состав боя, делегируют (направляют) своих представителей, по одному от каждой команды. Представителем команды может быть любой её участник. На первом этапе жеребьевки определяется порядок выступлений участников с докладами в каждом бое. Команды тянут жребий в порядке, обратном их расположению в составе боя согласно полной схеме Турнира, т.е. в порядке возрастания показанных ранее результатов. После этого состав, распределение ролей и порядок выступлений оппонирующих участников каждого раунда определяется по схеме боя. На втором этапе определяются задачи, которые докладывают участники боя. Порядок участия команд в этом этапе жеребьевки совпадает с порядком их выступления с докладами (т.е. с порядком их номеров в схеме боя). На втором этапе жеребьевки любая команда имеет право заявить *отказ*, т.е. отказаться от выпавшей ей задачи. После отказа команда переходит в конец очереди на жеребьевку, а вынутый номер задания возвращается на место. Количество разрешенных отказов команды определяется решением жюри турнира и сообщается командам во время регистрации. Каждый отказ сверх этого разрешенного количества штрафуетс^я снижением ролевого коэффициента за доклад на 0,5. Если на втором этапе жеребьевки команда вновь получает задание, от которого она уже отказывалась, то она может согласиться с ним или повторно отказаться – при этом отказ не засчитывается в общее число отказов команды. В любом бою команда не может докладывать задачи, уже доложенные ею в ранее проведенных боях. В случае выпадения такой задачи при жеребьевке команда тянет жребий повторно, а карточка с номером этой задачи возвращается на место после того, как команда согласилась с новой вытянутой задачей или отказалась от нее. После окончания жеребьевки всем оппонирующим участникам каждого раунда боя выдаются материалы, предоставленные соответствующими Докладчиками, для изучения и подготовки устных выступлений по ним. В этой подготовке может участвовать руководитель команды.

Жюри

Наблюдение за правильностью ведения боя и определение его результатов осуществляет *жюри* боя. Членов жюри боя назначает жюри Турнира в день боя. В состав жюри боя должно входить не менее пяти членов жюри Турнира. В состав жюри финальных боев назначаются только члены жюри Турнира. В боях отборочного тура в состав жюри могут включаться руководители команд, не участвующих в этом бое.

Роли команд в бое

Докладчик в своем основном выступлении должен кратко, но максимально полно и четко изложить результаты, полученные командой по задаче, дать ясное представление об использованных методах. Результатами могут являться как конкретные утверждения, так и метод решения, придуманный командой, идеи, или способ применения тех или иных методов (утверждений) к решению других задач, или даже специально построенный контрпример. В заключение доклада необходимо сделать резюме – кратко сформулировать важнейшие, с точки зрения Докладчика, результаты. Докладчику будет предоставлен ноутбук с проектором и экраном, так что ему следует подготовить презентацию со слайдами. В качестве докладчика может выступать любой участник команды, даже если он не является формальным автором решения, указанным в письменных материалах. Докладчик должен стремиться к тому, чтобы его выступление было понятно аудитории. **Оппонент** в своем выступлении дает оценку доклада, указав важнейшие, с его точки зрения, результаты, степень их обоснованности (доказанности), существенные и несущественные неточности в доказательствах, неверные утверждения (если таковые имеются). При этом необходимо использовать следующую шкалу оценок:

- верный и правильно доказанный результат,
- верный результат с несущественными ошибками в доказательстве,
- верный, но недоказанный результат (доказательство отсутствует или в нем допущены серьезные ошибки),
- сомнительный результат (и, разумеется, недоказанный),
- неверный результат.

Рецензент в своем выступлении оценивает, во-первых, выступление Оппонента: объективность оценки им доклада и его результатов, существенность и корректность заданных вопросов, а во-вторых – ответы Докладчика: их четкость, убедительность, находчивость. Также рецензент качественно оценивает дискуссию между Оппонентом и Докладчиком. В случае необходимости Рецензент дает свою оценку доклада (например, если его оценка не совпадает с общей оценкой Оппонента, или в докладе есть недостатки, не замеченные Оппонентом, и т.п.). Каждая **команда-Наблюдатель** имеет право на участие в дискуссии, если у нее имеются существенные дополнения или замечания, вызванные ходом дискуссии и не указанные Докладчиком, Оппонентом и Рецензентом. Малосодержательные выступления Наблюдателей, необоснованно затягивающие дискуссию, могут получить отрицательную оценку, снижающую итоговую сумму баллов команды. Внутри каждого тура роли докладчика, оппонента и рецензента должны быть представлены разными членами команды. Оппонент и Рецензент в своих основных выступлениях не представляют собственных результатов по обсуждаемой задаче, за исключением тех случаев, когда это служит аргументом в полемике (например, если по представленным материалам трудно судить о достоверности доказательств, а собственные результаты противоречат утверждениям Докладчика). Собственные идеи и результаты могут быть кратко описаны в заключительных выступлениях Оппонента, Рецензента, а также в выступлениях Наблюдателей. Жюри не обязано учитывать количество и качество результатов, полученных Оппонентом, Рецензентом и Наблюдателями по данной задаче, при выставлении окончательных оценок командам. За правильностью хода дискуссии и соблюдением правил математического боя следит председатель жюри боя, который является ведущим в этом бое. Всякое действие в ходе математического боя совершается только с его разрешения или по его сигналу. Право участвовать в дискуссии имеет только один представитель команды – непосредственно докладчик, оппонент и рецензент. Команда может вмешаться в ход дискуссии (задать вопрос или сделать выступление с места) только по просьбе выступающего. В этом случае выступающий обращается за разрешением к председателю жюри боя; выступление с места можно начинать только после его разрешения. От команды-Наблюдателя может выступать любой член команды, но лишь после разрешения ведущего.

Письменные рецензии

Все оппонирующие команды каждого боя должны сдать по электронной почте на адрес mail@spbtym.ru письменные отзывы на предоставленные им материалы Докладчиков этого боя не позднее времени, установленным Оргкомитетом:

- 9:30 для первого тура 30.10.2018

- 9:00 для второго тура 01.11.2018
- 8:00 для финального тура 03.11.2018

Объем отзыва не должен превышать двух страниц формата А4. Отзыв должен содержать общую оценку работы и список ошибок, влияющих на правильность результатов, а также список опечаток, неточных формулировок, которые затрудняют понимание работы, но в целом не влияют на правильность ее выводов. Образец письменного отзыва представлен ниже:

Письменный отзыв команды *ваша команда*

Задача № ... *название задачи*

Докладчик *название команды, выполнившей исследование*

1. Резюме по итогам проведенного исследования: в этой части дается краткое (в несколько строк) резюме письменных материалов, включая: а) номера пунктов, по которым представлены исследования (ответы, утверждения, обоснования – с пометкой: полностью или частично), б) замечания, полезные для общей оценки работы выполненной докладчиком, например: о качестве представленных материалов, их логичности и лаконичности, наличии опечаток и других небрежностей при оформлении, затрудняющих понимание текста (подробнее об этом указать в п. 2); в целом о проведенном исследовании: сложности и оригинальности идей, результатов и методов, а также целесообразности их использования (указания) в работе, полезности предложенных методов и доказательств для продолжения исследований по этой теме или для решения других задач.

2. Список ошибок, влияющих на правильность результатов, выводов, методов, а также список неточностей (опечаток и т.п.): это важнейшая часть письменного отзыва. В ней следует расположить ошибки (если таковые имеются) в порядке убывания важности. Ошибки должны иметь математический интерес. Команда может объяснить, как можно было бы исправить эти ошибки, не переписывая при этом полное решение.

3. Итоговая оценка. В этой части следует оценить проведенное исследование одним из следующих слов: великолепно, хорошо, удовлетворительно, плохо. Предыдущие пункты отзыва должны подвести к этой оценке.

Рейтинг и оценивание команд

Рейтинг каждой команды – это величина, аккумулирующая результаты, полученные командой в ходе Турнира, и призванная отражать ее относительную силу в ряду других участников. Стартовый рейтинг каждой команды устанавливается при регистрации и равняется нулю. После подведения итогов каждого тура Турнира производится корректировка рейтинга участвовавших в нем команд. Для этого текущее значение рейтинга каждой команды увеличивается на приращение ее рейтинга за прошедший тур R_T , определяемое по формуле

$$R_T = S_{Tk} / S_{Tcp},$$

где T – обозначение тура: S_{Tk} – сумма баллов, полученных командой в этом туре, S_{Tcp} – среднее арифметическое сумм баллов, полученных командами, участвовавшими в этом туре на тех же основаниях. После нулевого тура усреднение производится по всем участникам Турнира. После отборочных туров и финала усреднение производится только по составу того боя, в котором участвовала команда. Суммы баллов, полученные командами в боях отборочного тура или в финале, равны итоговым суммам баллов команд за соответствующий бой. После пересчета скорректированное значение рейтинга считается его текущим значением вплоть до следующей корректировки. Таким образом, текущий рейтинг команды равен:

- после нулевого тура $R := R_0$,
- после первого отборочного тура $R := R_0 + R_1$,
- после второго отборочного тура $R := R_0 + R_1 + R_2$,
- после финального боя

$$R := R_0 + R_1 + R_2 + R_3 \text{ (для участников финала),}$$

$$R := R_0 + R_1 + R_2 \text{ (для остальных участников).}$$

Текущее значение рейтинга команды после завершения всех туров Турнира называется окончательным рейтингом команды. Результаты турнира определяются исходом финальных боев. Первоочередное право на выход в основной финал имеют команды, одержавшие две победы в боях отборочных туров. Кроме того, в финальный бой допускаются команды с наиболее высоким

текущим рейтингом. Значение рейтинга, необходимое для выхода в финал Турнира, определяется особым решением жюри Турнира с таким расчетом, чтобы в финальном бое участвовало четыре команды. Первое, второе и последующие места в Турнире присуждаются командам, занявшим соответствующие места в основном финальном бое. Остальные участники следуют за ними в порядке убывания своего окончательного рейтинга. Победителями и призерами Турнира признаются участники финального боя. Победители Турнира награждаются дипломами I, II, III степеней. В дипломе указываются все участники команды. Участникам команд-призеров Турнира вручаются также индивидуальные дипломы. Отдельные команды и участники могут быть также отмечены отдельными похвальными отзывами.

Жюри боя определяет результаты каждого раунда и математического боя в целом посредством выставления оценок каждому из его участников. После завершения действий текущего раунда каждый член жюри боя выставляет всем участникам боя оценки за дискуссию. Оценки основаны на следующих результатах:

Оценивание докладчика. Научная часть 0-4 б. (верность результатов и доказательств, глубина и оригинальность методов, сложность задачи); письменные материалы 0-2 б. (структура, стиль и качество текста, языка); устное выступление -2-2 б. (структура, стиль и качество речи, соответствие материалам); дискуссия -2-3 б. (ответы на вопросы, знание соответствующей математической области, культурность и вежливость).

Оценивание оппонента. Письменная рецензия 0-4 б. (нахождение ошибок, оценка решения, стиль и качество); дискуссия -2-5 б. (актуальность вопросов, способность поддержки обсуждения, ответы на вопросы, знание соответствующей математической области, культурность и вежливость); оценка письменного исследования и презентации докладчика 0-2 б.

Оценивание рецензента. Письменная рецензия 0-4 б. (нахождение ошибок, оценка решения, стиль и качество); оценка дискуссии 0-4 б. (способность оценить дискуссию между докладчиком и оппонентом, их работу); дискуссия -2-3 б. (актуальность вопросов, способность поддержки обсуждения, ответы на вопросы, знание соответствующей математической области, культурность и вежливость).

Оценивание наблюдателя. Письменная рецензия 0-4 б. (нахождение ошибок, оценка решения, стиль и качество); замечания -3-3 б. (актуальность вопросов, культурность и вежливость).

Выставленные оценки за бой сообщаются участникам боя по окончании всех раундов боя. Каждый член жюри объявляет свою оценку лично и заносит ее в протокол. Полученная сумма используется для корректировки текущего рейтинга команды. При подведении итогов боя правила перевода оценок в баллы модернизируются в соответствии с личными коэффициентами команд. Пределы оценок, выставляемых участникам боя, и перевод оценок в баллы

	Оценка за письменный отзыв x	Оценка за дискуссию y	Рольевой коэффициент (применяется только к оценке за дискуссию) k	Балл, выставляемый команде
Докладчик	-	$-4 \leq y \leq 11$	$k = 3$ (или менее)	ky
Оппонент	$0 \leq x \leq 4$	$-2 \leq y \leq 7$	$k = 2$	$x + ky$
Рецензент	$0 \leq x \leq 4$	$-2 \leq y \leq 7$	$k = 1$	$x + ky$
Наблюдатель	$0 \leq x \leq 4$	$-3 \leq y \leq 3$	$k = 1$	$x + ky$

Оценки невыступавшим наблюдателям не выставляются и не объявляются, а при подсчете баллов считаются равными нулю. Если в состав жюри боя входит не более 5 человек, то при определении итогового балла команды учитываются все оценки, выставленные команде членами жюри. В этом случае число *учитываемых оценок* совпадает с числом членов жюри боя. Если в состав жюри боя входит более пяти человек, то при определении итоговых баллов команды одна наибольшая и одна наименьшая оценка, выставленные команде членами жюри за каждый раунд, не учитываются. В этом случае число учитываемых оценок на две меньше общего числа членов жюри. При определении результатов финальных боев в итоговую сумму баллов команды за бой кроме баллов, полученных в ходе боя, включается *турнирный балл*, получаемый умножением текущего рейтинга команды (определенного на момент начала финального боя) на число учитываемых оценок в финальном бое и на турнирный коэффициент, равный 5. При подсчете

итоговых результатов команд в бою и определении победителей боя оценки за доклад всех команд умножаются на личный коэффициент C_i , где i - номер докладываемой задачи. После этого все баллы участников боя суммируются как в обычной формуле. В соответствии с полученной суммой, которая называется итоговой суммой баллов за бой, распределяются места между командами в каждом бою. Итоговая сумма баллов за бой не влияет на рейтинг команд в Турнире. Первое место в математическом бое присуждается команде, набравшей наибольшую итоговую сумму баллов за бой, а также всем командам, набравшим не менее 95% от этой суммы. Последующие места присуждаются командам с меньшими итоговыми суммами баллов за бой в порядке убывания, при этом командам присуждаются одинаковые места, если несколько команд имеют не менее 95% от суммы, набранной первой из них. Если первое место в бою присуждено только одной команде, то такое первое место называется единоличным, а команда, занявшая его, считается абсолютным победителем этого боя.

Руководители

Основными задачами руководителей команд являются: обучение участников необходимым математическим знаниям; распределение участников по задачам и выбор направлений исследований; объяснение участникам принципов написания математических текстов, создания письменных рецензий на чужие исследования и презентации собственных результатов; проверка черновых вариантов письменных материалов команды; помощь участникам в понимании чужих исследований. Однако, предполагается, что руководители команд не занимаются непосредственным решением задач. Также руководителям запрещается помогать командам в течение раундов (они могут сидеть в той же комнате, что и их команда, но не слишком близко к ней).

Расписание

29 октября, понедельник

Время	Событие	Где проходит
10:00 – 10:30	Регистрация команд, представление окончательных материалов (задач) жюри	4 этаж, школа №564 (наб. Обводного канала д. 143)
10:30 – 10:50	Открытие турнира	Актальный зал, школа №564 (наб. Обводного канала д. 143)
11:15 – 13:15	Нулевой (письменный) тур	4 этаж, школа №564 (наб. Обводного канала д. 143)
13:15-14:15	Разбор задач нулевого тура	Актальный зал, школа №564 (наб. Обводного канала д. 143)
14:15-14:45	Апелляция по задачам нулевого тура, перерыв	4 этаж, школа №564 (наб. Обводного канала д. 143)
15:00	Жеребьёвка первого тура	Актальный зал 2 этаж, школа №564 (наб. Обводного канала д. 143)
16:00 - 21:00	Подготовка к боям первого тура	

30 октября, вторник

Время	Событие	Где проходит
10:00 – 14:30	Бои первого тура (с перерывами на кофе-брейк)	Школа №564 (наб. Обводного канала д. 143)
15:00	Жеребьёвка второго тура	Школа №564 (наб. Обводного канала д. 143)

31 октября, среда

Время	Событие	Где проходит
	Подготовка к боям второго тура	

1 ноября, четверг

Время	Событие	Где проходит
10:00 – 14:30	Бои второго тура (с перерывами на кофе-брейк)	Школа №564 (наб. Обводного канала д. 143)
15:00	Жеребьёвка финальных боёв	Школа №564 (наб. Обводного канала д. 143)

2 ноября, пятница

Время	Событие	Где проходит
	Подготовка к финальным боям	

3 ноября, суббота

Время	Событие	Где проходит
9:00 – 13:30	Финальные бои (с перерывами на кофе-брейк)	Бизнес-инкубатор «Ингрия» (пр. Медиков, д.3, лит. А)
13:30-14:30	Обсуждение задач турнира	Бизнес-инкубатор «Ингрия» (пр. Медиков, д.3, лит. А)
14:30-15:15	Открытая математическая лекция	Бизнес-инкубатор «Ингрия» (пр. Медиков, д.3, лит. А)
15:30	Закрытие турнира, награждение победителей	Бизнес-инкубатор «Ингрия» (пр. Медиков, д.3, лит. А)