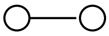
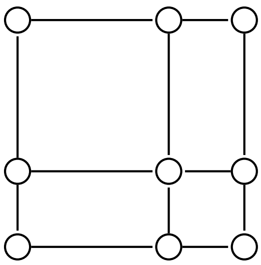
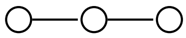
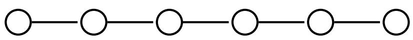
I САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ
младшая возрастная группа 5-8 классы

Задача №1 Геометрия принципа Дирихле

На бесконечную плоскость вылили краску: каждая точка плоскости покрасилась в черный или белый цвет, причем есть как черные точки, так и белые. Мы интересуемся, какие конфигурации разноцветных фигур обязаны возникнуть на плоскости. Рассмотрим следующий список:

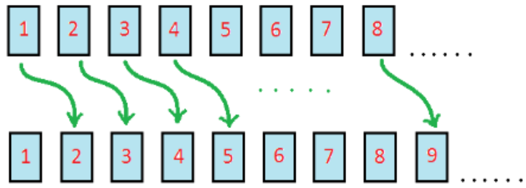
1. Отрезок 
2. Равнобедренный треугольник
3. Прямоугольный треугольник
4. Равнобедренный прямоугольный треугольник
5. Правильный треугольник
6. Прямоугольник
7. Прямоугольник с дополнительными вершинами, образующими 4 прямоугольника (внутренняя вершина выбирается произвольно — любая подобная фигура подойдёт)



8. Отрезок, разбитый на две равные части 
9. Отрезок, разбитый на n равных частей 

1. Для фигур из списка выше ответьте на следующий вопрос: обязательно ли на плоскости найдутся одноцветные точки, расположенные в форме вершин такой фигуры (без ограничений на величины длин сторон — фигуры можно вращать и масштабировать)? Например, если взять любые три разные точки на плоскости, две из них обязаны быть покрашены в один цвет, поэтому они будут образовывать одноцветный отрезок.
2. Пусть теперь плоскость покрашена в три цвета. Как изменятся ответы на вопрос первого пункта?
3. Для фигур с n вершинами из списка выше выясните, при любой ли раскраске плоскости в n цветов найдётся n точек различного цвета, расположенных в форме вершин такой фигуры. Например, из условия о том, что на плоскости найдутся точки как черного, так и белого цвета, следует, что разноцветный отрезок обязательно появится на ней.
4. Исследуйте предыдущие вопросы для фигур с заданными параметрами. Например, отрезок с длиной стороны 1; равнобедренный треугольник с длиной боковой стороны 1; прямоугольник с длиной одной из сторон 1; прямоугольник, являющийся квадратом; и другие.
5. Предложите свои фигуры из $n \geqslant 3$ вершин и ответьте про них на следующие вопросы: "гарантированно ли найдётся подходящая фигура с одноцветным множеством вершин при раскраске плоскости в $m \geqslant 2$ цветов", "гарантированно ли найдётся подходящая фигура с разноцветным множеством вершин при раскраске плоскости в n цветов".

Задача №2 Волшебный отель



В бесконечном отеле есть комнаты под номерами $1, 2, 3, \ldots$ и так далее. Сейчас они все заняты постояльцами. Выяснилось, что скоро приезжает известный ученый, которому необходимо выделить свободную комнату. На следующей неделе приедет проверка из столицы, поэтому владельцу отеля, Волшебнику, срочно нужно сделать так, чтобы все гости были довольны и никого не нужно было бы просить покинуть отель. Волшебник не растерялся и попросил всех постояльцев всего лишь переехать в комнату, номер которой на единицу больше номера их текущей комнаты. Тем самым постоялец из комнаты n должен переехать в комнату с номером $n+1$. Вся процедура была завершена буквально за час. На следующий день известный ученый поселился в свободную комнату с номером 1, а проверка из столицы прошла успешно.

1. Появились новости о том, что скоро в отель приезжает 100 человек. Получится ли у Волшебника поселить их (каждого человека в отдельную комнату), не заставляя никого уезжать из отеля?

2. На следующей неделе в отель приезжает бесконечный автобус школьников, за каждым из которых закреплён его посадочный номер n: есть школьник на первом сиденье, на втором, и так далее. Помогите Волшебнику поселить всех школьников в отеле.

3. Скоро в отель приезжает 100 бесконечных автобусов со школьниками! За каждым школьником закреплён номер M его автобуса и номер n его посадочного сиденья в автобусе M. Помогите Волшебнику заселить всех школьников в отель.

4. Беда! В отель приезжает бесконечное число автобусов, в каждом из которых сидит бесконечное число школьников! Сможет ли Волшебник заселить их всех в свой отель?

5. Скоро в отель приезжают математики. За ними не закреплено никакое место в автобусе, зато у каждого из них есть уникальная любимая несократимая дробь вида n/m, где $n, m \in \mathbb{N}$ (т.е. дробь, кодирующая положительное рациональное число), причем каждой такой дроби соответствует некоторый (уникальный) математик, — именно на эти уникальные дроби и ориентируется Волшебник. Сможет ли он поселить всех математиков в свой отель?

6. В отель приехали любители теории графов. Графом мы называем конечное множество V вершин графа, в котором указано, какие пары вершин $(u, v) \in V \times V$ соединяются между собой ребром ("какие рёбра соседствуют друг с другом"). Все ребра образуют множество $E \subseteq V \times V$, граф хранит информацию о паре (V, E). У каждого любителя теории графов есть уникальный граф, вершины которого занумерованы какими–то натуральными числами (формально, $V \subseteq \mathbb{N}$), причем каждый такой граф соответствует некоторому человеку. Сможет ли Волшебник поселить любителей теории графов в своём отеле?

7. В отель приехали лингвисты. У каждого лингвиста есть уникальное любимое слово из букв русского алфавита, причем каждое такое слово соответствует некоторому лингвисту. Сможет ли Волшебник поселить всех лингвистов в своём отеле?

8. В отель приехали более продвинутые лингвисты. Их уникальные любимые слова составлены из букв бесконечного межгалактического алфавита. Для восприятия сложной структуры получающегося языка разрешается представлять себе, что каждая буква этого алфавита кодируется некоторым натуральным числом. Тем самым можно сказать, что, например, 1 96 12 3 является словом языка. Сможет ли Волшебник заселить в свой отель всех продвинутых лингвистов?

9. На следующей неделе в отель приезжает группа из бесконечного числа программистов. Каждый из них имеет уникальный любимый двоичный код из бесконечного числа нулей и единиц. Например, есть программист с любимым кодом $010101\ldots$ и программист с кодом $110110110\ldots$, причем каждому коду соответствует некоторый программист. Сможет ли Волшебник заселить всех программистов в свой отель?

Задача №3 Через 100 метров поверните направо

Рассмотрим множество тех точек на плоскости, которые имеют целые координаты — будем называть это множество $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. *Маршрутом* в $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ будем называть такую конечную последовательность $x_0 \ldots x_n$ точек этого множества, что x_{k+1} — одна из четырёх точек, находящихся от x_k на расстоянии 1. Длина маршрута $x_0 \ldots x_n$ равна n.

Между двумя точками из $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ можно найти *кратчайшие маршруты* — те, концы которых находятся в этих точках и которые имеют наименьшую длину.

Будем говорить, что набор точек $a_0 \ldots a_m$ *привязывает* маршрут $x_0 \ldots x_n$, если выполнены два условия:

а) Данные точки лежат на указанном маршруте, причём в порядке возрастания номеров;

б) Участок указанного маршрута между точками a_k и a_{k+1} является кратчайшим маршрутом между этими точками.

Идея привязывающего набора точек очень проста и может быть проиллюстрирована, скажем, на карте города: отмеченные кругами точки на втором рисунке привязывают чёрный маршрут на этом рисунке.

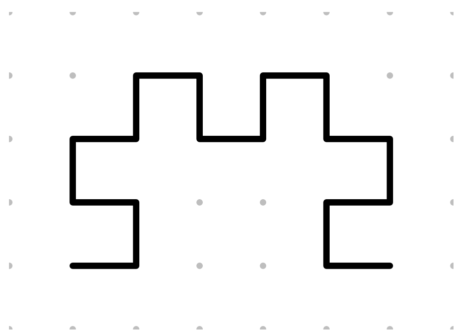


Рис. 1: Пример маршрута в $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

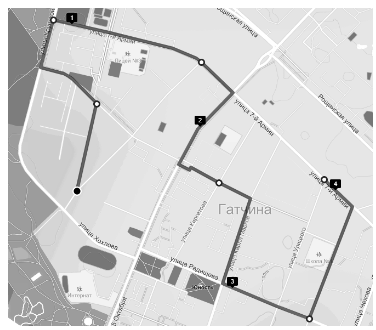


Рис. 2: Пример привязывающего набора

1. Придумайте маршрут длины 100 в $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, единственный привязывающий набор для которого — все его точки. Насколько различными могут быть такие маршруты?

2. Пусть маршрут длины n не ходит дважды по одному ребру (то есть, в последовательности его вершин не встречается $\ldots XYX \ldots$). Докажите, что такой маршрут может быть привязан набором из не более чем $\frac{n}{2} + 1$ своих точек.

3. Построить наименьший по размеру привязывающий набор для маршрута на первом рисунке и доказать, что привязывающих наборов меньшего размера не бывает.

В последующих пунктах задачи мы будем для простоты рассматривать только маршруты, которые не ходят дважды по одному ребру.

4. Верно ли, что всякий привязывающий набор для маршрута $x_0 \ldots x_n$, из которого нельзя выкинуть точку так, чтобы он остался привязывающим (такие наборы называются *минимальными по включению*), непременно является наименьшим по размеру?

5. Как на данном маршруте выбрать точки, образующие минимальный по размеру привязывающий набор? Предложите явную процедуру.

6. Аналогично с множеством $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ точек на плоскости можно ввести множество $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ точек в трёхмерном пространстве. Распространите решённые вами пункты на маршруты в этом множестве. Обобщается ли придуманная вами в пункте 5 процедура?

7. Пусть теперь точки в привязывающем наборе могут быть не только вершинами маршрута, но и серединами его отрезков. Каким в таких условиях будет размер наименьшего привязывающего набора?

Задача №4 За решёткой

1. На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольник размера 4×6, как на рисунке 3. Сколько из него можно выделить прямоугольников, вершины которых находились бы в узлах сетки, а стороны были бы горизонтальными и вертикальными? Например, для аналогичного прямоугольника размера 2×2 ответом является число 9.

2. А сколько прямоугольников можно выделить из прямоугольника размера $n \times m$ на клетчатой бумаге?

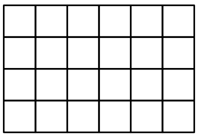


Рис. 3: Прямоугольник 4×6

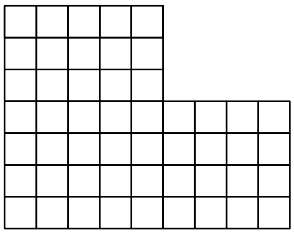


Рис. 4: Уголок

3. Сколько прямоугольников можно выделить из уголка на рисунке 4?

4. Сколько прямоугольников можно выделить из уголка произвольного размера, как на рисунке 5?

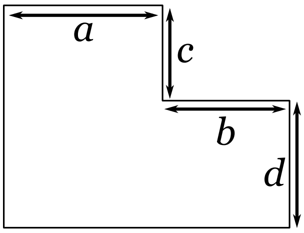


Рис. 5: Уголок произвольного размера

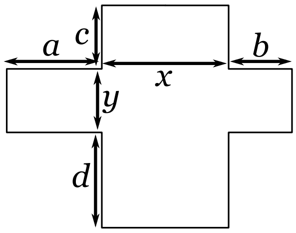


Рис. 6: Крестик произвольного размера

5. Сколько прямоугольников можно выделить из «крестика» произвольного размера, как на рисунке 6?

В дальнейших пунктах задачи мы будем рассматривать бумагу с треугольными клетками — разлинованную так, что на ней образуется сетка из правильных треугольников.

6. Сколько правильных треугольников можно вырезать по линиям сетки из правильного треугольника с длиной стороны 4, как на рисунке 7?

7. Сколько правильных треугольников можно вырезать по линиям сетки из правильного треугольника с длиной стороны n?

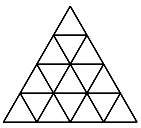


Рис. 7: Правильный треугольник с длиной стороны 4

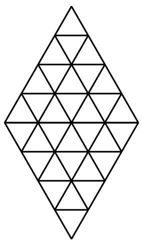


Рис. 8: Ромб с длиной стороны 4

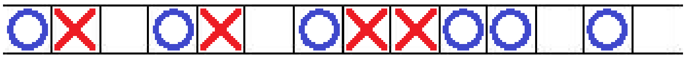
8. Сколько ромбов можно вырезать по линиям сетки из ромба с длиной стороны 4, как на рисунке 8?

9. Сколько ромбов можно вырезать по линиям сетки из ромба с длиной стороны n?

10. Рассмотрите свои обобщения и иные направления в данной задаче.

Задача №5 Наперегонки

На бесконечной влево и вправо клетчатой ленте двое игроков играют в игру. Тот, кто ходит первый, ставит за один ход крестик, а второй — несколько ноликов. Задача первого игрока состоит в том, чтобы собрать какой–нибудь набор из крестиков, в котором соседние крестики располагаются на одном и том же расстоянии друг от друга (такой набор будем называть правильным). Например, на рисунке ниже первый игрок смог собрать правильный набор из трёх крестиков



Задача второго игрока состоит в том, чтобы помешать ему. Игра заканчивается через n шагов (считается, что за один шаг оба игрока делают по одному ходу).

1. Пусть за один ход второй игрок может поставить $k = 2$ нолика.

1. Верно ли, что если второй игрок будет играть достаточно хорошо, за $n = 3$ шага первый игрок не сможет собрать правильный набор из $m = 3$ крестиков?
2. Верно ли, что если играть достаточно долго (некоторое число n шагов), то первый игрок гарантированно сможет собрать правильный набор из $m = 3$ крестиков и победить?
3. Верно ли то же самое для $m = 4$ крестиков?
4. Верно ли то же самое для $m = 5$ крестиков?

2. Исследуйте предыдущие вопросы в том случае, когда второй игрок за один ход ставит

1. $k = 3$ ноликов;
2. какое–то фиксированное число $k \in \mathbb{N}$ ноликов.

3. Какое наибольшее число правильных наборов из $m = 3$ крестиков может собрать первый игрок, если второй игрок за один ход ставит $k = 2$ нолика, а игра продолжается

1. $n = 6$ шагов;
2. $n = 10$ шагов;
3. некоторое натуральное n шагов?

Дайте приблизительный ответ и постарайтесь уточнить его.

4. Предложите собственные развития этой задачи и изучите их. Например, попытайтесь обобщить результат первого пункта для больших m.

Задача №6 Фестиваль языков

На международном фестивале языков обмениваются знаниями о разных языках и изучают их. В этом году состоится уже шестой ($n = 6$) по счёту фестиваль. Каждый год на него приглашается, вообще говоря, бесконечное число людей из разных стран, которые знают ровно один язык — свой родной. Кроме того, на n–ом фестивале собирается ровно n различных языков.

Участники фестиваля были пронумерованы целыми числами, распределены по группам и отправлены в комнаты, соответствующие их родному языку (каждая комната представлена одним языком), в которых они были посажены на стулья согласно их нумерации. На рисунке ниже показана бесконечная схема мероприятия: числа соответствуют людям (и стульям), а строчки — комнатам (и языку). Тем самым, каждое целое число задаёт некоторого человека.

...	-24	-18	-12	-6	0	6	12	18	...
...	-23	-17	-11	-5	1	7	13	19	...
...	-22	-16	-10	-4	2	8	14	20	...
...	-21	-15	-9	-3	3	9	15	21	...
...	-20	-14	-8	-2	4	10	16	22	...
...	-19	-13	-7	-1	5	11	17	23	...

В комнате, соответствующей языку, всех желающих обучают этому языку и рассказывают о его особенностях. Каждый участник фестиваля имеет право взять на себя роль организатора и перераспределить людей между комнатами. А именно, организатор m отправляет человека, сидящего в данный момент на стуле x, на стул под номером xm. Каждый человек на фестивале побывал организатором.

1. Известно, что через некоторое время после того, как очередной человек выполняет роль организатора, тренинг заканчивается, все люди возвращаются на свои стулья, и выбирается новый организатор.

1. Докажите, что если человек ходил учить некоторый язык, то и все его соседи по комнате ходили в тот же момент учить тот же самый язык.

2. В конце дня для практики в виде реального общения участники разбились на группы следующим образом: два человека в одной группе, если каждый из них учил язык другого. Схематично опишите разбиение людей на группы (при $n = 6$).

3. В алгебраических терминах укажите, когда два человека $x, y \in \mathbb{Z}$

   (a) имеют один и тот же родной язык

   (b) в конце дня попадают в одну группу

4. Исследуйте предыдущие вопросы для других фестивалей: на n–ом фестивале людей распределяют по комнатам с помощью бесконечной влево и вправо лентой с n строчками, аналогичной ленте выше. Все дальнейшие вопросы этой задачи также относятся к общему случаю $n \in \mathbb{N}$.

2. Участник $x \in \mathbb{Z}$ фестиваля называется продвинутым, если на нём он учил все языки.

1. При $n = 6$ выясните, в каких комнатах находятся продвинутые участники. Докажите, что на каждом фестивале $n \in \mathbb{N}$ все продвинутые участники попадают в одну группу.

2. Что можно сказать про число $n \in \mathbb{N}$, если все участники фестиваля n оказались продвинутыми?

3. Какие языки ходили учить люди, когда роль организаторов брали на себя продвинутые участники фестиваля?

4. Выясните, как по данному числу n понять, сколько групп образуется на фестивале. Закодируйте получающиеся группы какой–нибудь алгебраической характеристикой числа n. Как в терминах Вашего кодирования понять по данным людям $x, y \in \mathbb{Z}$, ходил ли x учить родной язык человека y?

3. Группу будем называть дружной, если каждый её участник обладает тем свойством, что при выполнении роли организатора он отправляет людей из своей группы на стулья людей своей же группы.

1. Докажите, что каждый год $n \in \mathbb{N}$ группа, в которой состоят продвинутые участники фестиваля, является дружной.

2. Какие группы являются дружными на фестивале $n = 12$? А на фестивале $n = 60$?

3. Участник фестиваля называется ленивым, если в тот момент, когда он выполняет роль организатора, все участники из его группы (в том числе он сам) остаются в своих комнатах. В каких группах есть ленивые люди?

4. Уберём условие п. **1** о том, что все люди возвращаются на свои стулья после завершения тренинга. Пусть $x \in \mathbb{Z}$ — участник фестиваля. Отправим его работать организатором много раз подряд. Будем говорить, что те языки, учить которые он ходил во время работы, ему нравятся.

1. Каким людям нравится свой родной язык?

2. Будем говорить, что группа пребывает в гармонии (или ”является гармоничной”), если в ней существует участник, которому нравятся все языки этой группы. Как связаны свойства группы ”быть гармоничной” и ”быть дружной”?

3. Опишите те группы, которые являются гармоничными.

Задача №7 Сам себе режиссёр

1. Придумайте десятизначное число в десятичной системе счисления, такое что его первая (старшая) цифра равна количеству нулей в его записи, вторая цифра равна количеству единиц в его записи, ..., последняя цифра равна количеству девяток в его записи.

2. Для всех систем счисления с основанием $n \geqslant 7$ опишите решение аналогичной задачи: найти n–значное число такое, что его старшая цифра равна количеству нулей в его записи, ..., его n–ая цифра равна количеству цифр $\mathrm{n}-1$ в его записи.

3. Есть ли другие решения этой задачи в десятичной системе счисления? Переносятся ли эти решения на другие системы счисления?

4. Есть ли вообще другие решения этой задачи в системах счисления с основанием $n \geqslant 7$?

5. Существуют ли решения аналогичной задачи для двоичной и троичной систем счисления?

6. Сколько решений этой задачи в системе счисления с основанием $n = 4$?

7. Есть ли решения этой задачи в системах счисления с основаниями 5, 6?

8. Как изменятся ответы в предыдущих пунктах, если вместо прежней мы рассмотрим другую, «развёрнутую» задачу:

   > Придумать n–значное число в системе счисления с основанием n такое, что его младшая цифра равна количеству нулей в его записи, цифра в его предпоследнем разряде равна количеству единиц в его записи, ..., цифра в его старшем разряде равна количеству цифр $\mathrm{n}-1$ в его записи?

Задача №8 Спартакиада

На спартакиаде проводят соревнование по прыжкам в длину. Выбирается подходящее поле для прыжков, оно расчерчивается на квадраты, и устанавливаются следующие правила: требуется прыгнуть в каждый квадрат ровно по одному разу. Задача состоит в том, чтобы при каждом прыжке между квадратами преодолевать как можно большее расстояние: в личный зачет каждому спортсмену идёт длина наименьшего прыжка.
1. Поле представляет из себя полоску из квадратиков $1 \times n$. Квадратики последовательно занумерованы натуральными числами от 1 до n. Спортсмен начинает в квадрате с номером 1. Например, если при $n = 5$ человек прыгает по квадратам в порядке $1, 3, 5, 2, 4$, то в зачёт ему идёт 2 балла.

1. Сколько различных возможностей для прыжков есть у спортсменов на поле $1 \times n$?

2. При $5 \leqslant n \leqslant 7$ найдите максимальное число очков, которое могли получить спортсмены на соревновании, и опишите способ, по которому нужно прыгать, чтобы набрать это число.

3. Исследуйте предыдущий вопрос на произвольной полоске $1 \times n$.

2. На следующем соревновании прыжки спортсменам запрещается прыгать так, чтобы их прыжок имел чётную длину. Например, при $n = 5$ разрешённой последовательностью прыжков является $1, 2, 5, 4, 3$, а последовательность из предыдущего пункта теперь является запрещённой.

1. Какое наибольшее число очков могли получить спортсмены при $n = 8$?

2. Исследуйте предыдущий вопрос в общем случае.

3. Полоску $1 \times n$ заменили на ленту, которая разбита на n квадратов, проходит вдоль экватора и огибает всю планету. Соревнование проходит без ограничений на прыжки. Например, при $n = 5$ человек может прыгать по квадратам в одном направлении экватора в порядке $1, 4, 2, 5, 3$, обогнув планету два с половиной раза; за такие прыжки в зачёт ему пойдёт 3 балла. Исследуйте вопрос о получении наибольшего числа очков на соревновании (ответ дайте в зависимости от n).

4. Исследуйте основной вопрос задачи на других полях, разбитых на квадратики, и при других ограничениях на прыжки. Например, введите ограничение, при котором спортсмены могут прыгать только на длину, делящуюся на 3. В случае замены поля, скажем, на прямоугольник $n \times m$, потребуется уточнить, как именно оцениваются прыжки спортсменов. Мы предлагаем на таком поле вычислять длину прыжка следующим образом: определить координаты каждого квадрата (левый нижний имеет координаты $(0,0)$, его правый сосед — $(1,0)$, а верхний — $(0,1)$, и так далее), а затем длиной прыжка из квадрата (a,b) в квадрат (x,y) считать число $|x-a|+|y-b|$.

Задача №9 Разрезания

В вашем распоряжении есть нож, которым можно разрезать некоторые объекты. По одному и тому же контуру запрещается делать разрез несколько раз. Кроме того, кусочки разрезаемого объекта должны оставаться неподвижны — перемещать их нельзя. Есть два вида разреза:

(1) вдоль прямой линии;

(2) вдоль окружности ненулевого радиуса.

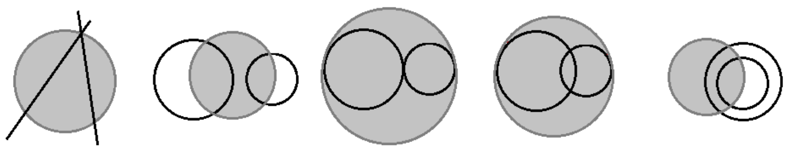
Основными объектами, над которыми будут проводиться разрезания, являются:

(D) диск, т.е. круг вместе с граничной окружностью;

(P) бесконечная плоскость.

Получается четыре вида разрезаний. Для $k = 1, 2$ через $Disk_k(n)$ и $Plane_k(n)$ обозначим множество конфигураций разрезаний диска и плоскости, которые состоят ровно из n разрезов, являющихся прямыми линиями при $k = 1$ и окружностями при $k = 2$. Например, на рисунках ниже описаны все две конфигурации из $Plane_1(2)$ и все пять конфигураций из $Plane_2(2)$. Тем самым двумя прямыми плоскость можно разрезать на 4 или 3 части, а окружностями — на $3, 3, 4, 3, 3$ частей.

Ниже показаны некоторые конфигурации разрезов диска двумя прямыми/окружностями на $3, 3, 4, 5, 3$ частей.



Мы интересуемся, какое число частей может получиться с помощью n разрезов.

1. Для конфигурации $C \in Disk_k(n) \cup Plane_k(n)$ обозначим через $P(C)$ число кусочков, на которые C делит круг/плоскость.

1. Для $k = 1, 2$ опишите все элементы в множествах $Disk_k(2)$ и $Plane_k(3)$.
2. Какое минимальное и максимальное значение может принимать $P(C)$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$? Для каждого из четырёх видов разрезаний дайте общий ответ, зависящий только от числа разрезов n.
3. Верно ли, что при всех n в каждом из четырёх видов разрезаний диск/плоскость можно разрезать на любое число частей, лежащее в пределах от минимального до максимального?

2. Для конфигурации $C \in Disk_k(n)$ обозначим через $I(C)$ число пересечений контуров разрезов, которые находятся внутри диска (не на границе).

1. Предположим, что разрезы в C проведены так, что никакие три контура не пересекаются в одной точке и что никакие два контура не пересекаются на границе диска. При $k = 1, 2$ как связаны между собой числа $P(C)$ и $I(C)$?

2. Как изменятся закономерности, если отбросить предположения о пересечениях контуров?

3. Свяжите числа $P(C)$ и $I(C)$ с количеством получающихся на C отрезков/дуг окружностей, соединяющих точки пересечения контуров.

3. Возьмём сферу в пространстве (шар без внутренности), которую будем разрезать ножом вдоль каких–то плоскостей. Это то же самое, что и разрезать сферу по контурам окружностей на ней.

1. Исследуйте получающиеся конфигурации разрезаний с n окружностями.

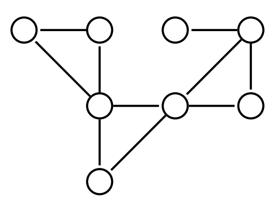
2. Исследуйте конфигурации разрезаний диска и плоскости, которые состоят и из окружностей, и из прямых, суммарное количество которых равно n.

3. Будем проводить разрезы плоскости по окружностям, проходящим через одну и ту же точку. Исследуйте получающиеся конфигурации разрезов.

4. Будем проводить разрезы сферы по окружностям, проходящим через одну и ту же точку. Исследуйте получающиеся конфигурации разрезов.

4. При фиксированном числе разрезов n выясните, на какое число частей невозможно разрезать диск/плоскость/сферу. Для начала докажите, что с помощью n прямых плоскость невозможно разрезать на $1, 2, \ldots, n-1, n, n+2, n+3, \ldots, 2n-1$ частей. Можно ли разрезать n прямыми плоскость на $2n+1, 2n+2, \ldots, 3n-2, 3n-3$ частей?
5. Исследуйте аналогичные вопросы задачи в одномерном и трехмерном случаях, в которых разрезаются отрезок, прямая, шар и пространство. Предложите собственные развития этой задачи или обобщения полученных результатов и изучите их.

Задача №10 Да будет свет



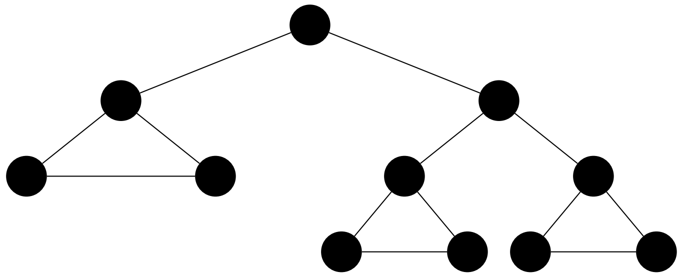
Рассмотрим некоторый граф из вершин и рёбер, как на рисунке справа. В каждой вершине этого графа расположен генератор электричества. Разрешается выбрать любой из них и запустить электричество из него в разные стороны вдоль рёбер (оно распространяется непрерывно со скоростью 1 ребро в секунду). Когда элекричество доходит по некоторому ребру до нового генератора, оно запускает его и порождает цепную реакцию, направляющую ток в остальные рёбра.

Если в точку на графе (на ребре или в вершине) приходит ток, она считается испорченной — больше по ней электричество не пройдёт. Электричество на графе полностью пропадает в двух случаях: когда он приходит в некоторую испорченную точку и когда он приходит в какую-то точку с двух разных сторон (происходит замыкание). После замыкания можно выбрать новый генератор и включить его.

Нас интересует, как устроены ручные включения генераторов на произвольном графе, приводящие к порче каждой точки этого графа. Все графы в этой задаче предполагаются связными (т.е. такими, что между любыми двумя его вершинами существует путь по рёбрам).

1. За какое наименьшее число ручных включений генераторов можно покрыть электричеством весь граф на рисунке выше?

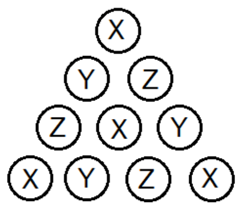
2. Исследуйте аналогичный вопрос для графа ниже



3. Опишите те графы, в которых все точки могут быть испорчены всего за одно нажатие генератора.
4. Приведите пример графа, генераторы в котором можно активировать так, что все вершины окажутся испорченными, а некоторые точки на рёбрах — нет.
5. Верно ли, что в любом графе можно по–очереди запускать генераторы так, чтобы электричество покрыло (т.е. испортило) каждую его точку?
6. Существует ли граф, который нельзя покрыть одним ручным включением генератора, но можно покрыть какими–то двумя включениями?
7. Существует ли граф, который нельзя покрыть одним, двумя, трёмя, ..., $n-1$ ручными включениями генератора, но можно покрыть какими–то n включениями? Дайте ответ для каждого $n \in \mathbb{N}$.
8. Существует ли граф, который нельзя покрыть одним ручным включением генератора, но можно покрыть любыми двумя включениями?
9. Существует ли граф, который нельзя покрыть одним или двумя ручными включением генератора, но можно покрыть любыми трёмя включениями?
10. Существует ли граф, который нельзя покрыть $1, 2, \ldots, n-1$ ручными включением генератора, но можно покрыть любыми n включениями? Дайте ответ для каждого $n \in \mathbb{N}$.
11. Предложите собственные развития этой задачи и изучите их. Например, дайте какое–нибудь описание графам, которые могут быть покрыты за n ручных включений генераторов.

Задача №11 Математическая генетика

Геном инопланетной клетки состоит из трёх типов нуклеотидов: X, Y, Z. Нуклеотид — это элементарный кусочек генетической информации. В нашем приближении — просто буква. Гены инопланетян выстраиваются не спиралями, как у нас, а треугольниками, причём выполняется следующее правило: над соседними нуклеотидами одного типа стоит нуклеотид того же типа, а над соседними нуклеотидами разных типов — оставшегося типа. Оказалось, что клетки инопланетян обладает удивительными свойствами симметрии. Ученые приступили к их генерированию в лабораторных условиях. Сначала из n произвольных нуклеотидов формируется нижний ряд треугольника. Затем он достраивается слой за слоем в соответствии с правилом выше.



1. Для всех возможных комбинаций нижнего ряда из $n = 4$ нулеотидов найдите тип нуклеотида, расположенного на вершине соответствующего треугольника (он называется старшим). Дайте наиболее компактный ответ на этот вопрос.

2. Решите аналогичную задачу при

1. $n = 7$
2. $n = 10$
3. $n = 13$
4. $n = 16$
5. $n = 28$

3. Придумайте способ, по которому можно найти количество нуклеотидов старшего типа, зная лишь нижний ряд треугольника,

1. при $n = 4$
2. при $n = 7$
3. в общем случае

4. Исследуйте вопрос о том, как связаны числа N, M, K, равные числу нуклеотидов в треугольнике типа X, Y, Z соответственно, с типами нуклеотидов из нижней строки.

Задача №12 Карточная алгебра

Рассмотрим колоду из n карт, карты которой занумерованы от 1 до n и имеют две стороны (белую и черную). Мы будем тасовать эту колоду из стартового состояния (в котором все карты расположены белой стороной вверх по возрастанию номеров от самой верхней карты к последней нижней) с помощью разных операций (тасований).

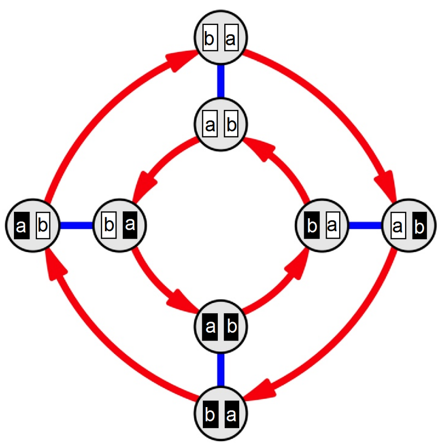
1. Обозначим через C_n множество всех расположений n карт в колоде, в которых карты занимают любые из n позиций белой или чёрной стороной вверх. Элементы множества C_n мы будем называть состояниями колоды. Например, существует восемь состояний колоды из двух карт: $ab, \overline{a}b, a\overline{b}, \overline{a}\overline{b}, ba, \overline{b}a, b\overline{a}, \overline{b}\tilde{a}$. Здесь черта означает переворот, буква a символизирует первую карту, а b — вторую. Найдите явную формулу для $|C_n|$.

2. Фиксируем число карт в колоде n (например, $n = 52$). Рассмотрим преобразования колоды из стартового состояния следующих типов:

- (T) поменять местами любые две карты
- (U) переместить любую карту (кроме самой верхней) вверх через одну
- (B) переместить верхнюю (т.е. первую) карту в любое место в колоде
- (S)$_m$ поменять местами верхню карту с m–ой сверху картой
- (UU) выбрать любую карту, не являющуюся первой или второй сверху, и переместить её вверх через две карты
- (R)$_m$ выбрать m верхних карт и переместить полученную часть в самый низ колоды
- (C) перевернуть верхнюю карту
- (CA) перевернуть любую карту
- (CC) перевернуть две верхние карты и поменять их местами
- (O) перевернуть все карты, имеющие в данный момент нечётный номер в колоде
- (CD) перевернуть верхнюю карту и переместить её в самый низ

Мы интересуемся, какие состояния колоды можно получить с помощью этих преобразований. Для каждого из следующих наборов преобразований выясните, какие состояния колоды можно получить с помощью них, имея стартовую колоду: (T); (T) и (C); (U) и (C); (B); (B) и (C); $(S)_1, \dots, (S)_n$ и (C); (T) и (CC); (UU); (UU) и (C); $(R)_1$ и (CC); (T) и (O); (CD) и $(S)_2$; (UU) и (CD); $(R)_m$ для разных фиксированных m. Например, узнайте, сколько состояний так можно получить, в каком случае можно получить состояние, которое даёт $(S)_2$ из стартовой колоды, и т.д.

3. Пусть S — некоторый набор тасований колоды. Построим по нему граф $\Gamma = (V, E)$ с разноцветными рёбрами, вершинами которого являются состояния колоды ($V = C_n$). Из каждой вершины (состояний колоды) мы проведём ребро "цвета" $s \in S$ в вершину, которая задаёт состояние колоды, получающееся в результате применения тасования s к данному состоянию. Таким образом, такой граф имеет $|C_n|$ вершин и из каждой вершины выходит $|S|$ рёбер разных цветов. Например, ниже изображён такой граф для колоды из двух карт, в котором в качестве S выбрано множество всех преобразований типа (T) и типа (CD) (для удобства на рисунке рядом с каждой вершиной вместо двух синих рёбер, соответствующих (T), изображено одно синее ребро).



1. Нарисуйте такой граф для колоды из двух карт, в котором в качестве S выбрано множество всех преобразований типа (T) и типа (C).

2. Для наборов S из второго пункта задачи найдите количество компонент связности соответствующего графа. Какие графы получаются связными?

3. Выясните, какое наименьшее число тасований может быть в наборе S, граф которого является связным.

4. Выберем какое–нибудь тасование s и начнём применять его много раз к стартовой колоде. Для каких s верно, что в какой–то момент получится снова стартовая колода?

4. Пусть s — некоторое тасование стартовой колоды. Применим его. Говорят, что пара карт в процессе тасования была инвертирована (или что она "образует инверсию"), если до тасования они располагались в одном порядке (скажем, a ниже b), а после тасования — в другом (a выше b). Например, все тасования типа (T) имеют одну инверсию, (C) — ноль, а (UU) — две.

1. Нарисуем граф, соответствующий набору S всех преобразований типа (U) и типа (CA). Пусть s — какое–то тасование. Применим его к стартовой колоде и рассмотрим получающуюся вершину графа. Выясните, как связано количество инверсий тасования s и количество карт, лежащих черной стороной вверх, с расположением этой вершины.

2. Исследуйте аналогичный вопрос о расположении вершины на графе, заданным набором S всех преобразований типов (T) и (CA).

3. Исследуйте аналогичный вопрос на графе, заданным набором S преобразований типов (UU) и (CA).

5. Предложите свои собственные направления задачи и изучите их.