VI ОТКРЫТЫЙ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

26 — 31 марта 2018 года

Ключевые слова: 1. теория чисел 2. метрические пространства 3. алгебраическая геометрия 4. выпуклый анализ 5. дискретная математика 6. комбинаторная теория групп 7. теория чисел 8. дифференциальная геометрия 9. выпуклая геометрия 10. сравнения по модулю 11. теория кодирования.

Задача №1 Узоры на скатерти Улама

Расположим натуральные числа в виде спирали, как показано на рисунке ниже. Полученная картинка называется скатертью Улама.

37	36	35	34	33	32	31
38	17	16	15	14	13	30
39	18	5	4	3	12	29
40	19	6	1	2	11	28
41	20	7	8	9	10	27
42	21	22	23	24	25	26
43	44	45	46	47	48	...

В этой задаче требуется изучить закономерности и узоры, связанные с расположением разных числовых последовательности на скатерти. Интерес представляют не только гипотезы, полученные, например, на компьютере, но и явные соотношения.

1) Выясните, как на скатерти Улама описываются числовые последовательности на вертикальных, горизонтальных и диагональных прямых.

2) Исследуйте на скатерти расположения

   а) квадратных чисел $\mathcal{F}_n^{(4)}$,

   б) треугольных чисел $\mathcal{F}_n^{(3)}$ (найдите количество ветвей на получающейся картинке),

   в) фигурных чисел разных порядков $\mathcal{F}_n^{(m)}$,

   г) многомерных фигурных чисел.

3) Исследуйте на скатерти Улама расположения арифметических и геометрических прогрессий. Попробуйте также описать расположения известных числовых последовательностей, возникающих в комбинаторике: чисел Фибоначчи, чисел Каталана и т.п.

4) Рассмотрите другие нумерации целых точек всей плоскости или каких–то фигур на этой плоскости. Например занумеруем сектор следующим образом:

1					
2	3				
4	5	6			
7	8	9	10		
11	12	13	14	15	
16	17	18	19	20	21

   Ответьте на сформулированные выше вопросы для новых нумераций.

Задача №2 Префиксные отображения

Пусть $X_1, X_2, X_3, \ldots$ — последовательность множеств. Обозначим через P множество всех последовательностей $a = (a_1, a_2, \ldots,)$, где $a_i \in X_i$. Последовательность $a^{(i)}$ элементов P (то есть последовательность последовательностей) назовём сходящейся к элементу $a \in P$, если для каждого фиксированного n последовательность $a_n^{(i)}$ стабилизируется и $a_n^{(i)} = a_n$ для достаточно больших i. Подмножество $C \subseteq P$ называется замкнутым, если любая сходящаяся последовательность элементов из C сходится к элементу из C. Отображение $F : P \to P$ называется замкнутым, если оно переводит замкнутые подмножества в замкнутые подмножества.

Рассмотрим набор отображений

$$f_i : X_1 \times \ldots \times X_i \longrightarrow X_i,$$

каждое из которых будем называть префиксными компонентами. По префиксным компонентам зададим префиксное отображение — функцию $F : P \to P$, действующую по формуле

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \ldots).$$

1) Приведите пример функции, не являющейся префиксным отображением. Докажите, что если все X_i конечны, то любое префиксное отображение замкнуто.

2) Пусть $X_i = \mathbb{R}^{n_i}$. Докажите, что если компоненты префиксного отображения являются линейными отображениями, то такое префиксное отображение замкнуто.

3) Пусть компоненты f_i не зависят от первых $i - 1$ переменной для любого i, то есть существуют функции $g_i : X_i \to X_i$ такие, что $f_i(a_1, \ldots, a_i) = g_i(a_i)$. Докажите, что такое префиксное отображение замкнуто.

4) Покажите, что если все X_i бесконечны, то существует незамкнутое префиксное отображение. А если некоторые из X_i конечны?

5) Пусть $X_i = \mathbb{R}^2$. Существуют ли незамкнутые префиксные отображения, компоненты которых заданы многочленами?

6) Пусть $X_i = \mathbb{R}^{n_i}$. Предложите свои условия, при которых префиксное отображение будет замкнутым.

Задача №3 Обобщенные гиперболические и тригонометрические системы

Пусть $n \geq 2$. Набор бесконечно–дифференцируемых функций $\mathcal{H}_n = (H_1, \ldots, H_n)$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ назовём *гиперболической системой* порядка n, если $H_i' = H_{i+1}$ для $1 \leq i < n$, $H_n' = H_1$ и $H_i(0) = \delta_{i,n}$. Аналогично, набор бесконечно–дифференцируемых функций $\mathcal{T}_n = (T_1, \ldots, T_n)$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ называется *тригонометрической системой* порядка n, если $T_i' = T_{i+1}$ для $1 \leq i < n$, $T_n' = -T_1$ и $T_i(0) = \delta_{i,n}$.

1) Докажите, что пары $(\mathrm{sh}(t), \mathrm{ch}(t))$ и $(\sin(t), \cos(t))$ задают, соответственно, единственные возможные гиперболические и тригонометрические системы порядка 2. В явном виде опишите гиперболические и тригонометрические системы порядка n.

2) Докажите, что для гиперболических и тригонометрических систем порядка 2 выполнены формулы Эйлера: $H_2(t) + H_1(t) = e^t$ и $T_2(t) + iT_1(t) = e^{it}$. Обобщите их на произвольные системы $\mathcal{H}_n, \mathcal{T}_n$.

3) При всех $1 \leq i \leq n$ выразите $H_i(s+t)$ через $H_j(s), H_k(t)$ и $T_i(s+t)$ через $T_j(s), T_k(t)$. Кроме того, исследуйте функции из наборов $\mathcal{H}_n$ и $\mathcal{T}_n$ на четность и нечетность.

   Пусть $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Изучите предыдущие пункты для модифицированных систем $\mathcal{H}_n^\lambda$ и $\mathcal{T}_n^\lambda$, в определении которых фигурируют равенства $H_n'(t) = \lambda H_1(t)$ и $T_n'(t) = -\lambda T_1(t)$, соответственно.

4) Докажите, что для гиперболических и тригонометрических систем порядка 2 выполнены соотношения $H_2^2(t) - H_1^2(t) = 1$ и $T_2^2(t) + T_1^2(t) = 1$. Иными словами, образы при отображениях $L_2 : t \mapsto (H_1(t), H_2(t))$ и $M_2 : t \mapsto (T_1(t), T_2(t))$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$ могут быть заданы алгебраическими уравнениями. Выясните, можно ли задать образы при отображениях

$$L_n : t \longmapsto (H_1(t), \ldots, H_n(t))$$
$$M_n : t \longmapsto (T_1(t), \ldots, T_n(t))$$

из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$ алгебраическими уравнениями. В частности, найдите однородные многочлены p_n, q_n степени n такие, что для $f_n := p_n - 1$ и $g_n := q_n - 1$ выполнено

$$f_n(H_1(t), \dots, H_n(t)) = 0,$$
$$g_n(T_1(t), \dots, T_n(t)) = 0$$

при любом t. Например, $f_2(x, y) = y^2 - x^2 - 1$ и $g_2(x, y) = y^2 + x^2 - 1$. Верно ли, что многочлены $f_n, g_n \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ неприводимы?

5) Опишите все перестановки $\sigma \in S_n$, для которых $p_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = p_n(x_1, \dots, x_n)$ при всех $x_1, \dots, x_n$. Аналогичный вопрос для q_n.

6) Опишите все точки образов L_n и M_n в $\mathbb{R}^n$ с целыми координатами. Опишите все точки с рациональными координатами. Придумайте, как по двум целым/рациональным точкам из образов L_n, M_n получить новую целую/рациональную точку на L_n и M_n соответственно. Изучите получающееся "сложение точек".

Задача №4 Многоугольники

1) Пусть F_1 и F_2 два выпуклых многоугольника, множества вершин которых совпадают. Покажите, что F_1 равен F_2.

2) Пусть F_1 и F_2 не обязательно выпуклы, но удовлетворяют условию про вершины. Выясните, что можно сказать про их расположение.

3) Пусть F_1 и F_2 выпуклы, а середины сторон F_1 лежат в F_2. Как связаны площади F_1 и F_2?

4) Пусть F_1 и F_2 выпуклы, а середины сторон F_1 лежат в F_2 и середины сторон F_2 лежат в F_1. Верно ли, что такие многоугольники равны?

5) Зафиксируем $0 \le \alpha \le 1$. Точка на стороне многоугольника называется его α–серединой, если она делит эту сторону в отношении $\alpha : (1 - \alpha)$. Известно, что для каждой стороны F_1 какая-то α–середина лежит в F_2. Что можно сказать про площади F_1 и F_2?

6) Исследуйте предыдущие вопросы в случае, когда один из многоугольников не обязательно выпуклый.

Задача №5 Конечные вычисления

Основная идея этой задачи — исследование дискретных аналогов дифференцирования и интегрирования. Интерес представляют явные сравнения непрерывных и дискретных конструкций между собой.

Обозначим через **Seq** множество всех вещественных числовых последовательностей. Сами последовательности будем обозначать символами $x_n \in \mathbf{Seq}$, а их соответствующие элементы (значения) под номером k через $x_n[k]$ (начиная с 0). Таким образом, $x_n = y_n \iff x_n[k] = y_n[k], \forall k \ge 0$.

Определим функции $\Delta, \int$ из **Seq** в **Seq** по правилам

$$(\Delta x_n)[k] := x_n[k+1] - x_n[k]$$
$$\left(\int x_n dn\right)[k] := \sum_{i=0}^{k-1} x_n[i].$$

Они называются разностным оператором и оператором суммирования, а последовательности $\Delta x_n, \int x_n dn$ — производной и интегралом x_n соответственно. Если $\Delta F_n = x_n$, то F_n называется первообразной x_n. Если A — некоторый оператор (т.е. функция из **Seq** в **Seq**), то A^n — это новый оператор, являющийся композицией A с собой n раз.

1. Опишите связи между производной, интегралом, первообразной и сдвигом x_n, где под сдвигом понимается $(\mathbf{E}x_n)[k] = x_n[k+1]$. Кроме того, найдите явную формулу для $\Delta^m x_n$.

Константы $c \in \mathbb{R}$ задают постоянные и показательные последовательности $\mathrm{c}, \mathrm{c}^n \in \mathbf{Seq}$ по формулам $\mathrm{c}[k] := c$ и $\mathrm{c}^n[k] := c^k$. Кроме того, определим для $m = 0, 1, 2, \ldots$ последовательности n^m и $n^{\underline{m}}$ степеней и падающих степеней по формулам $n^m[k] := k^m$ и $n^{\underline{m}}[k] := k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot(k-(m-1))$. Набор всех последовательностей из $\mathbf{Seq}$, которые могут быть выражены как линейные комбинации последовательностей $1, n, n^2, \ldots, n^{m-1}$, обозначим через $\mathcal{P}_m$. Аналогично, через $\mathcal{FP}_m$ обозначим последовательности, являющиеся линейными комбинациями падающих степеней $1, n, n^{\underline{2}}, \ldots, n^{\underline{m-1}}$. Последовательности из $\mathcal{P}_m$ или $\mathcal{FP}_m$ будем называть полиномиальными.

2. Выясните, как связаны между собой $\mathcal{P}_m$ и $\mathcal{FP}_m$ и предложите какие–нибудь интересные эквивалентные описания последовательностей из этих множеств. Точнее, сравните $\mathcal{P}_i$ и Δ^j. А как связаны между собой $\int x_n dn$ и $\mathcal{P}_i$?

3. Найдите дискретные аналоги формул Ньютона–Лейбница и интегрирования по частям. Затем найдите в явном виде $\int n\, dn$, $\int n^2 dn$, $\int \mathcal{F}_n^{(3)} dn$, $\int \lambda^n dn$, $\int n\lambda^{n-1} dn$, $\int n^2 2^{n-1} dn$, $\int \mathcal{F}_n^{(m)} dn$. Существует ли комбинаторное/геометрическое решение? Предложите свои собственные числовые последовательности и опишите их производные и интегралы. Например, рассмотрите известные числовые последовательности такие, как числа Фибоначчи.

4. Рассмотрим последовательность $S_n^{(m)}$, которая определяется по формуле $S_n^{(m)} := \int n^m dn$. Покажите, что $S_n^{(m)}$ является полиномиальной последовательностью и в явном виде выразите её через последовательности степеней или падающих степеней.

5. Для каждой последовательности $x_n \in \mathbf{Seq}$ определим её последовательность Тейлора $\langle x_n \rangle$ по правилу $\langle x_n \rangle[k] := (\Delta^k x_n)[0]$. Найдите последовательности Тейлора ваших любимых последовательностей. Например, последовательностей падающих степеней. Кроме того, докажите, что функция $x_n \mapsto \langle x_n \rangle$ обратима и в явном виде найдите её обратную.

   Обозначим через $\mathcal{P}_\infty$ множество всех формальных бесконечных комбинаций вида

   $$x_n = \alpha_0 + \alpha_1 n^{\underline{1}} + \alpha_2 n^{\underline{2}} + \ldots,$$

   где $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Каждая такая комбинация в действительности определяет числовую последовательность $x_n \in \mathbf{Seq}$, потому что при каждом k сумма $x_n[k]$ будет конечна. Например, $\mathcal{P}_m \subset \mathcal{P}_\infty$ при всех $m \geq 1$. Докажите, что каждая последовательность в $\mathbf{Seq}$ может быть представлена в таком виде и явно найдите соответствующие коэффициенты α_k.

6. Придумайте свои обобщения полученных результатов. Например, изучите периодические или рекуррентные последовательности, их производные, интегралы и связанные с ними тождества — рассмотрите функцию $\Delta_T(x_n)[k] := x_n[k+T] - x_n[k]$, придумайте аналог биномиальной теоремы для падающих степеней, изучите "дифференциальные уравнения" вида $\sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta^i(x_n) = 0$, исследуйте частные производные последовательностей от двух индексов $x_{n,m}$ и кратные интегралы $\int\int x_{n,m} dn\, dm$ или привлеките иные методы дискретной математики для изучения разных классов последовательностей.

Задача №6 Геометрия и алгебра слов

Рассмотрим некоторое конечное множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, которое будем называть алфавитом. Для каждого элемента $a \in A$ введём дополнительно символ a^{-1}. Множество всх таких символов обозначим за A^{-1}. Теперь определим расширенный алфавит $\Sigma = A \cup A^{-1}$. Тем самым можно рассмотреть набор

$$\Sigma^* = \{\varepsilon, a_1, a_2, \ldots, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_1 a_1, a_1 a_2, \ldots, a_1 a_1^{-1}, a_1 a_2^{-1}, \ldots\}$$

всех слов, которые можно получить из букв алфавита Σ, где ε — пустое слово длины ноль. На этом наборе определена операция приписывания слов, которую можно рассматривать как функцию $\Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$. Например, $abaa \cdot ba = abaaba$. Коротко будем записывать $a^n = a \cdot \ldots \cdot a$ (n раз).

Зафиксируем некоторый набор изометрий $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subseteq \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ пространства $\mathbb{R}^n$. Мы можем компонировать данные изометрии между собой: $xy := x \circ y$. Для каждой изометрии $x \in X$ по–определению есть обратное отображение x^{-1}, которое тоже будет изометрией. Теперь определена функция $f_X : \Sigma^* \longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, которая действует следующим образом: буквам a_i сопоставляются изометрии x_i, буквам a_i^{-1} сопоставляются изометрии x_i^{-1}, пустому слову ε сопоставляется тождественное отображение id, а образ длинного слова вычисляется по рекуррентному правилу $f_X(w_1 w_2) = f_X(w_1) \cdot f_X(w_2)$.

На геометрическом уровне некоторые получающиеся слова будут совпадать. Например, если x, y — это переносы на векторы $(1, 0)$ и $(0, 1)$ в $\mathbb{R}^2$, то изометрии xy и yx равны. Кроме того, если z, w — это отражение относительно начала координат и поворот против часовой стрелки на $\pi/2$ относительно нуля, то $zx \neq xz$, $z^2 = w^4 = \mathrm{id}$ и $y^{-1}wx = \mathrm{id}$. Таким образом, некоторые слова в получающемся языке должны интерпретироваться как совпадающие. Будем говорить, что два слова $u, v \in \Sigma^*$ являются X–эквивалентными, если $f_X(u) = f_X(v)$. Через W_X обозначается фактормножество множества Σ^* по получающемуся отношению эквивалентности (такое множество однозначно задаётся каким–нибудь полным набором из попарно неэквивалентных слов, то есть таким набором, что любое слово $v \in \Sigma^*$ эквивалентно слову из него, но никакие два разных слова из в наборе друг другу не эквивалентны).

0) Докажите, что X–эквивалентность является отношением эквивалентности на Σ^*.

Через $R \subseteq \Sigma^*$ будем обозначать какой-то фиксированный набор слов, а слова из R будем называть *пустыми* (на геометрическом уровне пустые слова будут отвечать тождественным изометриям). Будем говорить, что два слова $w, u \in \Sigma^*$ являются R–эквивалентными и писать $u \equiv v$, если u можно получить из w с помощью многократного применения следующей операции: между любыми двумя буквами слова w (или с краю) можно вставить (приписать) любое слово из $\overline{R} := R \cup \{\varepsilon\} \cup \{aa^{-1} \mid a \in A\} \cup \{a^{-1}a \mid a \in A\}$, а также из слова w можно вычеркнуть отрезок (часть), равный одному из слов в $\overline{R}$. Считается, что если вычеркнуть из слова само слово, то останется слово длины ноль, т.е. ε. Через $\langle \Sigma \mid R \rangle$ обозначается фактормножество Σ^* по такому отношению эквивалентности.

0) Докажите, что R–эквивалентность является отношением эквивалентности на Σ^* и проверьте, что если $u, v, w, w' \in \Sigma^*$ и $w \equiv w'$, то $uwv \equiv uw'v$.

В этой задаче предлагается изучить алгебраические аспекты изометрий, в основном возникающих как движения (чаще, отражения) из $Fix(\Phi) := \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \mid \varphi(\Phi) = \Phi\}$, сохраняющие данную геометрическую фигуру Φ в $\mathbb{R}^n$.

1) Пусть $A = \{a, b\}$ и $R = \{a^2, b^2, abab\}$. Тогда, например, $bab \equiv aabab \equiv a \equiv abb \equiv \varepsilon a \varepsilon b \varepsilon b \varepsilon$.

   а) Докажите, что любое слово из Σ^* в действительности R–эквивалентно одному из слов из $\{\varepsilon, a, b, ab\}$.

   б) Найдите пару $(X = \{x, y\}, f_X)$ из двух изометрий $x, y \neq \mathrm{id}$ и функции $f_X : \Sigma^* \to \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, для которой отношения R– и X–эквивалентности совпадают. Можно ли выбрать $x, y \in Fix(\Phi)$ для подходящей фигуры Φ и в какой наименьшей размерности?

   в) Докажите, что слова ε, a, b, ab все попарно R–неэквивалентны.

2) Пусть $X = \{x, y\}$, где x, y — это нетривиальный перенос на вектор $(1, 0)$ и нетривиальная скользящая симметрия в перпендикулярном направлении соответственно.

   а) Докажите, что $xyx = y$, то есть $xyxy^{-1} = \mathrm{id}$.

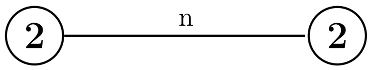
   б) Пусть $A = \{a, b\}$ и $R = \{abab^{-1}\} \subseteq \Sigma^*$. Определена функция f_X, переводящая a, b в x, y и продолжающаяся на все слова алфавита Σ по установленным в условии правилам. Докажите, что отношения R– и X–эквивалентности совпадают.

3) Рассмотрим квадратную табличку из $m \times m$ натуральных чисел $d_{i,j} \geq 2$, среди которых может встретиться символ ∞. Построим по ней граф $\Gamma = (V, E)$, в котором $V = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$, а вершины r_i, r_j соединены ребром в том и только в том случае, когда $d_{i,j} \geq 3$ (включая ∞). В вершинах графа Γ изображаются числа $d_{i,i}$, а число $d_{i,j}$ рисуется на ребре (r_i, r_j) в том и только в том случае, когда $d_{i,j} \geq 4$ (включая ∞). Этими условиями исходная таблица восстанавливается по графу однозначно. Пусть $A = V$, а $R \subseteq \Sigma^*$ всех слов вида $(r_i r_j)^{d_{i,j}}$, где $i \neq j$, и всех слов вида $r_i^{d_{i,i}}$. Если $d_{i,j} = \infty$, то соответствующее слово не входит в R. Будем обозначать $G_\Gamma := \langle \Sigma \mid R \rangle$. Решения дальнейших вопросов интересны даже при малых m.

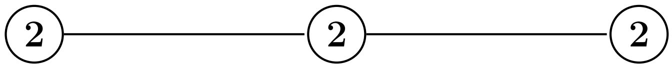
   а) Опишите G_Γ для графа с одной вершиной с $d_{1,1} = n$, где $n \geq 2$. Найдите такую изометрию a, для которой $a^k \neq \mathrm{id}$ при $1 \leq k < n$ но $a^n = \mathrm{id}$. В частности, найдите пару (X, f_X), для которой отношения R– и X–эквивалентности совпадают.

   б) Опишите G_Γ для графа с n изолированными вершинами, где $d_{i,i} = 2$, и найдите пару (X, f_X), для которой отношения R– и X–эквивалентности совпадают. А что, вообще, происходит с алфавитом при взятии дюзъюнктного объединения графов?

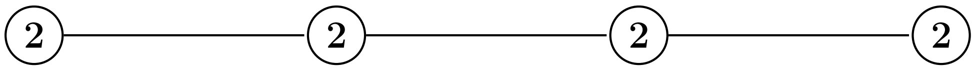
   в) Опишите G_Γ для графа ниже ($n \geq 2$ или $n = \infty$) и найдите пару (X, f_X), для которой отношения R– и X–эквивалентности совпадают.



г) Решите аналогичную задачу для графа



д) Более общо, решите аналогичную задачу для графа из n вершин, являющегося простой ломаной.



4) По графу Γ построим квадратичную форму на $\mathbb{R}^m$

$$Q_\Gamma(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \sum_{(i,j)\in E} x_i x_j.$$

Найдите соответствующие квадратичные формы для графов из предыдущих пунктов и исследуйте их на положительную определённость. Докажите, что если квадратичная форма Q_Γ является положительно определённой, то граф Γ

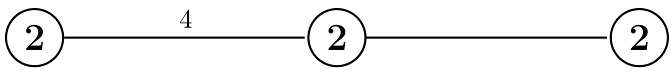
а) не содержит циклов

б) не содержит вершин степени 4 и больше

в) содержит не более одной вершины степени 3

Что ещё можно сказать про граф Γ, если соответствуюшая форма положительно определена?

5) Рассмотрите граф ниже и найдите пару (X, f_X), для которой отношения R– и X–эквивалентности совпадают.



Исследуйте ситуацию, при которой такой граф состоит из n вершин и продолжается вправо ребрами с $d_{i,i+1} = 3$, $i \geq 2$.

Задача №7 Факториалы Бхаргавы

В 2000 году лауреат Филдсовской премии Манжул Бхаргава нашёл обобщение целочисленного факториала, в котором для каждого подмножества $S \subseteq \mathbb{Z}$ определяется $n!_S$, причём, $n!_\mathbb{Z} = n!$. Оказалось, что его конструкция естественным образом обобщает наиболее интересные свойства обычного факториала. Ссылка на статью: *goo.gl/zF3p5N* (The Factorial Function and Generalizations, Manjul Bhargava). В этой задаче предлагается продолжить исследование Бхаргавы в конкретном направлении. Одной из основ этого продолжения служит следующее утверждение.

1. Докажите, что любое положительное рациональное число может быть представлено в виде частного произведений факториалов (не обязательно различных) простых чисел. Например,

$$\frac{10}{9} = \frac{2! \cdot 5!}{3! \cdot 3! \cdot 3!}.$$

Напомним конструкцию Бхаргавы. Зафиксируем подмножество $S \subseteq \mathbb{Z}$ и простое число $p \in \mathbb{P}$. Построим последовательность $a_0, a_1, \ldots \in S$ следующим образом: выберем произвольное $a_0 \in S$; выберем элемент $a_1 \in S$ так, чтобы разность $a_1 - a_0$ делилась на наименьшую возможную степень числа p; выберем элемент $a_2 \in S$ так, чтобы разность $(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)$ делилась на наименьшую возможную степень числа p, и так далее. На шаге k выберем $a_k \in S$ так, чтобы разность $(a_k - a_0) \cdot \ldots \cdot (a_k - a_{k-1})$ делилась на наименьшую возможную степень числа p. Вместе с построенной последовательностью a_n мы получаем также монотонно возрастающую последовательность соответствующих степеней p

$$\nu_k(S, p) := p^{\mathrm{ord}_p\left(\prod_{i=0}^{k-1}(a_k - a_i)\right)},$$

где $\nu_0(S,p)=1$. Теперь обобщённый факториал на S для $k\geq 0$ определяется по формуле

$$k!_S := \prod_{p\in\mathbb{P}} \nu_k(S,p).$$

2. Проверьте, что последовательность $\nu_k(S,p)$ не зависит от выбора a_k. Кроме того, докажите, что для каждого $S\subseteq\mathbb{Z}$ в произведении выше лишь конечное число множителей не равно единице.

3. Пусть $S=a\mathbb{Z}+b:=\{an+b\mid n\in\mathbb{Z}\}$ или $S=\{q^k\mid k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.

   а) Какие значения может принимать отношение факториалов $n!_S/m!_S$ в зависимости от a,b,q?

   б) Ответьте на предыдущий вопрос, если числа $n=p, m=q$ предполагаются простыми.

   в) Опишите возможные значения, которые может принимать биномиальный коэффициент Бхаргавы

   $$\binom{n}{k}_S := \frac{n!_S}{k!_S(n-k)!_S}.$$

   г) Ответьте на предыдущий вопрос, если числа $n=p$ предполагаются простыми.

4. Ответьте на вопросы предыдущего пункта для произвольного S.

5. Исследуйте вопросы п. 3 (а,б) и 4, описав возможные отношения произведений факториалов Бхаргавы.

Задача №8 О приближении кривых

Кривой на плоскости называется инъективное непрерывное отображение $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^2$. Нас будут интересовать кривые из класса $\mathbf{C}^\infty$ — те, для которых каждая из компонент отображения $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ непрерывно дифференцируется бесконечное число раз.

Пусть $\zeta,\gamma\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$. Кривую ζ будем называть *ε–близкой* к кривой γ, если

$$\zeta(a)=\gamma(a),\quad \zeta(b)=\gamma(b),\quad \forall\, t\in[a,b]\ \ \exists\, s\in[a,b]\colon\ \operatorname{dist}(\zeta(t),\gamma(s))<\varepsilon.$$

Кривую ζ будем называть *ε–приближением* γ, если

$$\zeta(a)=\gamma(a),\quad \zeta(b)=\gamma(b),\quad \forall\, t\in[a,b]\ \ \operatorname{dist}(\zeta(t),\gamma(t))<\varepsilon.$$

Пусть $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^2$ — регулярная кривая. Её ε–длиной называется число

$$L_\varepsilon(\gamma)=\inf\left\{L(\zeta)\mid \zeta \text{ — } \varepsilon\text{–приближение } \gamma\right\}.$$

1) Докажите, что у регулярных кривых любой длины бывают сколь угодно длинные регулярные приближения. Иными словами, для любого числа $\mathcal{D}>0$ и для любой регулярной кривой γ существует регулярная кривая $\zeta\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2$ с длиной $L(\zeta)>\mathcal{D}$, являющаяся её ε–приближением.

2) Докажите, что для любой регулярной кривой γ существует константа ε_0 такая, что при $\varepsilon<\varepsilon_0$ инфимум из определения ε–длины совпадает с инфимумами длин (а) кривых, ε–близких к γ; (б) ломаных, ε–близких к γ. Укажите, как найти ε_0.

3) Пусть γ — регулярная кривая, про которую известно, что её кривизна ограничена сверху числом $\frac{1}{r}$. При $\varepsilon<\frac{r}{2}$ дайте как можно более точную нижнюю оценку на $L_\varepsilon(\gamma)$ (и проверьте, достигается ли она).

4) Для регулярной кривой γ докажите, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon(\gamma)=L(\gamma)$. Докажите то же самое для произвольной непрерывной кривой конечной длины.

Перейдём от кривых к ломаным на плоскости. Пусть $\mathcal{C}_n$ — множество несамопересекающихся ломаных с вершинами в точках множества $\frac{1}{n}\mathbb{Z}\times\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ и рёбрами длины $\frac{1}{n}$. Несложно перенести определение ε–близости на случай ломаных — расстояние dist между двумя точками на плоскости нам теперь будет удобнее определить как

$$\operatorname{dist}\Big((x,y),\,(z,t)\Big)=\max\{|x-z|,\,|t-y|\}\quad\text{(проверьте, что это метрика).}$$

Дана регулярная кривая $\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2$, причем $\gamma(0),\gamma(1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Ее n–пикселизацией (обозначим через γ_n) будем называть кратчайшую ломаную из $\mathcal{C}_n$, которая $1/n$–близка к γ. Обозначим $\mathcal{P}_n(\gamma)=L(\gamma_n)$.

5) Для данной ломаной $\lambda \in \mathcal{C}_1$ и чисел $n, \varepsilon \in \mathbb{N}$ как можно более точно оцените длину самой короткой и самой длинной ломаных из $\mathcal{C}_n$, ε–близких к λ (и проверьте, достигаются ли ваши оценки).

6) Для произвольной регулярной кривой γ оцените $\mathcal{P}_n(\gamma)$ и найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{P}_n(\gamma)$.

7) Предложите и исследуйте свои обобщения данной задачи: например, можно рассмотреть другие метрики и другие сетки допустимых вершин на плоскости.

Задача №9 Экстремальные тетраэдры

Задачи на плоскости.

1) Среди всех треугольников, вписанных в единичную окружность, найдите треугольник с
   а) максимальным периметром,
   б) максимальной площадью,
   в) максимальным радиусом вписанной окружности.

2) Шириной треугольника в направлении α, где $\alpha \in [0, \pi]$, называется величина $w(\alpha)$, равная длине проекции треугольника на прямую, образующую с осью абсцисс угол α. Средней шириной треугольника называется величина
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} w(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$
   а) Придумайте, как по периметру треугольника найти его среднюю ширину.
   б) Среди всех треугольников, вписанных в единичную окружность, найдите треугольник с максимальной средней шириной.

Задачи в $\mathbb{R}^3$.

3) а) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальным объемом.
   б) Докажите следующее обобщенное тождество параллелограмма: если $X_1, \dots, X_n$ — векторы в $\mathbb{R}^3$, где n — натуральное число, то
$$\sum_{1\le i<j\le n} \|X_i - X_j\|^2 + \|\sum_{i=1}^{n} X_i\|^2 = n\sum_{i=1}^{n} \|X_i\|^2.$$
   в) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальной суммой длин ребер.
   г) Пусть дан тетраэдр в $\mathbb{R}^3$. Известно, что любое его ребро ортогонально плоскости, проходящей через середину этого ребра и оставшиеся две вершины тетраэдра. Докажете, что тетраэдр правильный.
   д) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальной площадью поверхности (суммой площадей граней).
   е) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальным радиусом вписанной сферы.

4) Пусть тетраэр $ABCD$ вписан в единичную сферу с центром O. Суммой углов обзора тетраэдра называется величина
$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle AOC + \sphericalangle AOD + \sphericalangle BOC + \sphericalangle BOD + \sphericalangle COD.$$
   Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную сферу, найдите тетраэдр с максимальной суммой углов обзора.

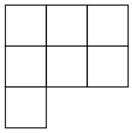
5) а) Используя полярные координаты в $\mathbb{R}^3$, обобщите понятние средней ширины треугольника на трехмерный случай (для тетраэдра).
   б) Среди всех тетраэдров, вписанных в единичную окружность, попробуйте найти тетраэдр с максимальной средней шириной.

6) Многомерным обобщением треугольника и тетраэдра в $\mathbb{R}^n$ является симплекс — многогранник, у которого $n + 1$ вершина. Попытайтесь пункты 3) – 5) обобщить на многомерный случай.

Задача №10 Динамические системы

Зафиксируем натуральное число n и рассмотрим множество $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ возможных остатков при делении на n. В этой задаче предлагается изучить некоторые разбиения $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ на подмножества (классы эквивалентности) и исследовать динамику этих разбиений при малых изменениях задающих их параметров. Изменения при этом будут контролироваться некоторой функцией $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Каждое разбиение $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ задаёт представление числа n в виде суммы неотрицательных слагаемых, а следовательно, задаёт диаграмму Юнга соответствующего порядка. Интерес вызывает как количество строчек в этой диаграмме, так и их длина.

Рассмотрим наименьшее отношение эквивалентности на $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, при котором каждый остаток $[x]$ эквивалентен остатку $[f(x)]$. В зависимости от f и n найдите число всех классов, на которые полученное отношение делит $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Например, при $n = 7$ функция $f(x) = 4x + 1$ задаёт разбиение $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{[0], [1], [5]\} \cup \{[2]\} \cup \{[3], [6], [4]\}$ и диаграмму



Интерес в представляют как гипотезы и наблюдения, связанные с динамикой ответов, так и строгие доказательства. Какая трансформация f вносит большее изменение: умножение на два $f(x) \mapsto 2f(x)$ или прибавление единицы $f(x) \mapsto f(x) + 1$? Предлагается проводить исследование в следующем порядке:

1) Изучите случаи $f_a(x) = ax$, где a — фиксированное целое число, и $f(x) = x^2$.

2) Изучите случай $f_{a,b}(x) = ax + b$, начиная с совсем малых целых b. Опробуйте оба подхода: фиксируйте a, b и меняйте n или фиксируйте n и меняйте a, b, а затем изучите форму получающихся диаграмм.

    а) Траекторией x называется последовательность x, $f_{a,b}(x)$, $f_{a,b}(f_{a,b}(x)), \ldots$. В предположении $(a, n) > 1$, опишите остатки $[x]$, трактории которых образуют цикл.

    б) Постарайтесь описать траекторию остатка $[0]$.

    в) Постарайтесь найти те характеристики получающихся диаграмм Юнга, которые поддаются вычислению в зависимости от n, a, b.

    г) Фиксируйте a, b и опишите чезаровские средние (по n) мощностей получающихся классов эквивалентности. Затем попробуйте брать средние по другой переменной (a или b).

3) Изучите случаи $f_m(x) = x^m$ и $f(x) = x^2 + 1$.

4) Выясните, для каких полиномиальных функций f искомые числа классов эквивалентности и их размеров поддаются явному вычислению, и проведите соответствующее исследование. Например, выясните, какие замены функции $f \mapsto g$ приводят к незначительным изменениям ответов.

Задача №11. ПОЗ-коды

Сотрите мне память (Н.В. Гоголь. Вий)
Стереть нельзя исправить (крылатое выражение)

Возможно, вам знакома перфокарта — картонка, в которой можно пробивать отверстия. С помощью перфокарты удобно хранить информацию в машиночитаемом виде: есть отверстие — 1, нет — 0. У перфокарты есть важное свойство: любой 0 легко меняется на 1, но обратная замена крайне затруднена. Память с таким свойством называют *памятью с однократной записью (ПОЗ)*, или по-английски *Write-Once Memory (WOM)*. Один бит такой памяти называется *витом*.

Ограничение казалось бы не позволяет такую память перезаписывать несколько раз, но в 1982 году Р.Ривест и А.Шамир в статье «How to Reuse a “Write-Once” Memory» предложили кодировку, позволяющую ценой некоторого увеличения объёма носителя предоставить возможность перезаписи информации.

Например, с помощью трёх витов оказывается возможно записать некоторое двухбитовое число, а потом однократно заменить его на другое:

число	*кодировка для первой записи*	*кодировка для повторной записи*
00	000	111
01	100	011
10	010	101
11	001	110

Допустим, можно сперва записать 10, используя код 010, а потом записать число 01 на его место, заменив третий вит на 1 и получив код 011.

Недавно эта область исследований получила второе дыхание в связи с распространением флэш-памяти (обладающей очень похожими свойствами). Ниже мы предлагаем вам задачи, связанные с данной областью:

1) Представим себе проездной билет, стоимость которого (целое число от 0 до $n-1$) запоминается с помощью k витов — скажем, компостируется при покупке. Предложите кодировку, позволяющую исключить увеличивающее стоимость изменение витов (докомпостирование билета) после покупки. Приведите по возможности точные верхние и нижние оценки на число k для вашей кодировки. Также предложите теоретические верхние и нижние оценки на количество витов в кодировках с такими свойствами.

2) В условиях п.1 предложите кодировку, исключающую любое изменение стоимости после покупки. Иными словами, кодировку, в которой любые дополнительные изменения витов делают код любого числа некорректным (не соответствующим никакому числу). Также приведите оценки для предложенной кодировки и теоретические оценки.

3) Представим себе проездной билет, в котором используется ПОЗ для хранения числа поездок. После каждой поездки число уменьшается на 1, пока не достигнет нуля. Предложите кодировку, позволяющую хранить эту информацию по возможности максимально эффективно по памяти. Дайте как теоретические, так и достигаемые вашей кодировкой верхние и нижние оценки необходимого количества витов. Убедитесь, что предложенный вами код не позволяет увеличить количество поездок в процессе перезаписи значений.

4) Пусть в ПОЗ хранится не число поездок, а оплаченная стоимость в рублях, при этом при поездке со счёта снимается либо 40, либо 45 рублей (в зависимости, например, от вида транспорта). Возможно ли с учётом этого ограничения сделать кодировку более эффективной по памяти и улучшить оценки из п.3?

5) Обобщите результат из п.4 на случай произвольного набора стоимостей поездки.

6) Рассмотрим ситуацию, когда мы записываем события на длинную ленту. Скажем, речь может идти о показаниях скорости — увеличилась ли она на 1 от предыдущего наблюдения, уменьшилась ли на 1 или осталась прежней. Сравнительно легко иметь дело с ситуациями, когда каждое следующее событие имеет ровно 2^k значений — тогда мы про каждое событие будем дописывать к ленте ровно k витов и сразу переходить к следующему. Однако, можете ли вы предложить более эффективную по памяти кодировку в той ситуации, когда количество вариантов, например, равно 3? Естественно, вы можете, помимо добавления новых витов, исправлять какие-то из предыдущих.

7) Рассмотрите п.6 для произвольного количества вариантов значений, добавляемых на каждом шаге.

8) Предложите какие-нибудь свои аналогичные задачи и кодировки, подходящие для их решения. Этот пункт также подходит для изложения кодировок, придуманных вами в процессе решения задачи, но не подошедших под условия.

Определения

Задача 1. Для $m \in \mathbb{N}$ фигурные (m–угольные) числа задаются последовательностью $\mathcal{F}_n^{(m)}$ по формуле

$$\mathcal{F}_n^{(m)} := \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}.$$

В частности, $P_n^{(2)} := \mathcal{F}_n^{(3)} = n(n+1)/2$ — это последовательность треугольных чисел, которая является частью серии последовательностей m–симплекс чисел $P_n^{(m)} := \binom{n+m-1}{m}$. Числа Фибоначчи определяются по рекурсии $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, где $F_0 = 0$ и $F_1 = 1$, а числа Каталана — по формуле $C_n = \binom{n}{k}/(n+1)$.
Задача 2. Рассмотрим множество X и функцию $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Функция d называется метрикой (расстоянием), если для неё выполнены три свойства:

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (неравенство треугольника)

В таком случае пара (X, d) называется метрическим пространством. Например, $(\mathbb{R}^n, d)$ — метрическое пространство, где d — евклидово расстояние

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}.$$

Пусть (X, d_1) и (Y, d_2) — два метрических пространства. Функция $f : X \to Y$ называется изометрическим отображением, если оно сохраняет расстояние: $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$. Биективное изометрическое отображение называется изометрией. Отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется линейным, если оно имеет вид

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k,$$

для некоторых фиксированных $v_k \in \mathbb{R}^m$.
Задача 3. Символ Кронекера $\delta_{x,y}$ определяется по формуле

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

Основные тригонометрические и гиперболические функции $\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяются по формулам

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Неконстантный многочлен $f \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ называется неприводимым, если из равенства $f = gh$, где $g, h \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$, следует, что g или h константы. Через S_n обозначается множество всех перестановок n элементов, то есть множество всех биективных функций $\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Легко видеть, что $|S_n| = n!$.
Задача 4. Многоугольником на плоскости называется множество, состоящее из нескольких точек (вершин) $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и отрезков (рёбер), соединяющих точки вида p_i, p_{i+1}. Иными словами, многоугольник — это простая замкнутая ломаная. Многоугольник называется выпуклым, если все его точки лежат по одну сторону от любой прямой, проходящей через две его соседние вершины.
Задача 5. Пусть $\{x_n^{(k)}\} = \{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots x_n^{(m)}\}$ — конечный набор числовых последовательностей. Выберем несколько чисел $\alpha_k \in \mathbb{R}$ и назовём линейной комбинацией последовательностей $x_n^{(k)}$ с коэффициентами α_k последовательность $x_n := \alpha_1 x_n^{(1)} + \alpha_2 x_n^{(2)} + \ldots + \alpha_m x_n^{(m)}$. Ассоциативным кольцом с единицей называется множество R вместе со введёнными на нём операциями сложения $+ \colon R \times R \to R$ и умножения $\cdot : R \times R \to R$, удовлетворяющими следующим свойствам (здесь квантор $\forall$ опускается):
1) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
2) $a + b = b + a$;

3) в R найдётся такой элемент $0 \in R$, что $a + 0 = 0 + a = a$;
4) для любого a из R существует такой элемент b из R, для которого $a + b = b + a = 0$. Он обозначается $-a := b$;
5) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
6) $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$;
7) в R найдётся такой элемент $1 \in R$, что $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
8) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Ассоциативные кольца с единицей будем называть просто кольцами. Кольцо R называется коммутативным, если $a \cdot b = b \cdot a$. Примерами коммутативных колец являются множества целых $\mathbb{Z}$, рациональных $\mathbb{Q}$, вещественных $\mathbb{R}$, комплексных $\mathbb{C}$ чисел относительно естественных операций сложения и умножения. Знак умножения $\cdot$ часто опускается при записи.

Формулой Ньютона–Лейбница называется следующее утверждение: если f непрерывна на $[a, b]$, а F – её первообразная (т.е. $F' = f$), то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Формулой интегрирования по частям называется соотношение

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Задача 6. Бинарным отношением между множествами X, Y называется произвольное подмножество $R \subseteq X \times Y$. В случае $X = Y$ ещё говорят, что R задано на X. Бинарное отношение на X называется отношением эквивалентности, если

- $(x, x) \in R$ (рефлексивность)
- $(x, y) \in R \iff (y, x) \in R$ (симметричность)
- $(x, y) \in R,\ (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$ (транзитивность)

Каждое отношение эквивалентности задаёт на X разбиение $X = \sqcup X_i$, где в каждом X_i все элементы попарно эквивалентны, а элементы из разных X_i — не эквивалентны, и наоборот.

Рассмотрим множество G и функцию $\mu : G \times G \to G$. Обычно пишут $xy := \mu(x, y)$. Говорят, что пара (G, μ) является группой, если выполнены три свойства:

- $(xy)z = x(yz)$.
- Существует такой элемент $e \in G$, что $xe = ex = x$ при всех $x \in G$.
- Для любого x из G существует такой элемент y из G, для которого $xy = yx = e$. Он обозначается $x^{-1} := y$.

Например, $(\mathrm{Isom}(R^n), \circ)$ — это группа: первое свойство означает ассоциативность композиции, второе — существование тождественного отображения $e := \mathrm{id}$, действующего по правилу $\mathrm{id}(x) = x$, а третье — тот факт, что каждая изометрия обратима, а обратное отображение тоже является изометрией. Квадратичной формой на $\mathbb{R}^n$ называется функция $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, имеющая вид

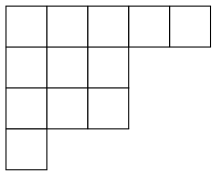
$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Форма Q называется положительно определённой, если для всех $x \neq 0$ из $\mathbb{R}^n$ выполнено $Q(x) > 0$.
Задача 7. Для $n \in \mathbb{N}$ число $\mathrm{ord}_p(n)$ обозначает наибольшее такое m, что p^m делит n. Оно называется степенью вхождения p в n.
Задача 8. Кривая $\gamma \in \mathbf{C}^\infty$ называется регулярной, если $|\gamma'|$ всегда отличен от нуля (и, как следствие теоремы Вейерштрасса, отделён от него). Длина непрерывной кривой $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ определяется по формуле

$$L(\gamma) \quad = \sup_{a = t_0 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n = b} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{dist}\left(\gamma(t_{k+1}), \gamma(t_k)\right) \right].$$

В предположении $\gamma \in \mathbf{C}^\infty$ длину можно вычислить по формуле $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$. **Параметризация кривой:** пусть на плоскости изображено множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, про которое нам известно, что оно является образом регулярной кривой. Параметризацией Γ называется регулярная кривая $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Gamma$, сюръективная на Γ. **Кривизна:** несложно убедиться в том, что для любой регулярной кривой существует *натуральная* параметризация — такая, что $|\gamma'(t)| = 1$ при любом $t \in [a, b]$. Для натуральной параметризации можно проверить, что $\gamma''(t) \perp \gamma'(t)$ $\forall\, t \in [a, b]$. Если γ — натуральная параметризация данной кривой, то её кривизной в точке t (обозначение $\kappa(t)$) называется число $|\gamma''(t)|$. Кривизну можно считать «мерой» того, насколько кривая изгибается в данной точке; чем она больше — тем ощутимее изгиб.

Задача 10. Пусть n — натуральное число. Разбиением числа n называется его представление в виде суммы натуральных слагаемых. При этом порядок следования слагаемых не учитывается, то есть разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми. Разбиения удобно представлять в виде диаграммы Юнга. Это фигуры, состоящие из квадратиков, причем число квадратиков в очередной строке диаграммы равняется одному из слагаемых разбиения. Слагаемые при этом считаются упорядоченными по убыванию. Например, разбиению $12 = 5 + 3 + 3 + 1$ соответствует такая диаграмма Юнга:



Пусть a_n — числовая последовательность. Последовательность c_n, заданная по формуле $c_n = (\sum_{k=1}^n a_k)/n$, называется последовательностью чезаровских средних для a_n.