Порядки

Гейдар Мамедов (9 класс), Михайловский Дмитрий (10 класс)

команда ЛНМО

В данной работе были полностью решены пункты 1,2,3,4,5 и предложены некоторые обобщения, применимые в пункте 6.

Содержание

1 Постановка задачи

Пусть M_1 и M_2 — два частично упорядоченных множества. Отображение $f : M_1 \longrightarrow M_2$ называется монотонным, если для любых $x, y \in M_1$ таких, что $x \leqslant y$, выполнено, что $f(x) \leqslant f(y)$, относительно порядка на M_2. Монотонное отображение $f : M_1 \longrightarrow M_2$ называется изоморфизмом, если f биективно и обратное отображение $f^{-1} : M_2 \longrightarrow M_1$ также монотонно. Если между M_1 и M_2 существует изоморфизм, то будем говорить, что M_1 и M_2 изоморфны и писать $M_1 \cong M_2$.

1. Пусть $f : M \longrightarrow N$ – изоморфизм двух упорядоченных множеств. Покажите, что для любого $x \in M$ множество $M_{\leqslant x} = \{y \in M \mid y \leqslant x\}$ изоморфно $N_{\leqslant f(x)} = \{y \in N \mid y \leqslant f(x)\}$.

2. Опишите все изоморфизмы из $\mathcal{P}(X)$ в $\mathcal{P}(X)$, где $\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X, упорядоченных относительно включения $\subseteq$.

3. Пусть M_1 и M_2 — два упорядоченных множества. Тогда введём на $M_1 \times M_2$ прядок следующим образом:

   $(x_1, y_1) \leqslant_{nat} (x_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 \leqslant x_2$ и $y_1 \leqslant y_2$.

   Обозначим полученное упорядоченное множество как $M_1 \times_{nat} M_2$. Будем называть такой порядок естественным или покоординатным. Введём на $M_1 \times M_2$ другой порядок:

   $(x_1, y_1) \leqslant_{lex} (x_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 < x_2$ или когда $x_1 = x_2$ и $y_1 \leqslant y_2$.

   Обозначим это упорядоченное множество как $M_1 \times_{lex} M_2$.

   Покажите, что следующие упорядоченные множества не изоморфны между собой:

   $$\mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{N} \times_{nat} \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \times_{lex} \mathbb{N}, \quad \mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}.$$

4. Изоморфны или нет следующие множества:

   $$\mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q} \times_{lex} \mathbb{R}, \quad \mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{R}?$$

5. Какие из следующих множеств изоморфны:

   $$(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}) \times_{nat} \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} \times_{lex} (\mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z}), \quad (\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{N}) \times_{nat} \mathbb{Z}?$$

6. Рассмотрите предыдущий вопрос, когда сомножителей больше чем три, "скобки" можно расставлять произвольным образом и на произведениях можно ввести операцию одним из двух описанных выше способов.

7. Опишите все изоморфизмы между найденными парами изоморфных упорядоченных множеств.

2 Обозначения и определения

Пусть $(X, \leqslant)$ – частично упорядоченное множество. Различные элементы $x, y \in X$ называются соседними, если верна импликация

$$x \leqslant z \leqslant y \implies x = z \text{ или } z = y.$$

Элемент $y \in X$ называется предшествующим элементу $x \in X$, если $y \leqslant x$ и x, y – соседние. В *линейно упорядоченном* множестве $(X, \leqslant)$ мы пишем $A \leqslant B$ в том и только в том случае, когда верна импликация

$$x \in A,\ y \in B \quad \implies \quad x = y.$$

Через $\mathbb{I}$ мы обозначаем множество всех иррациональных чисел с соответствующим линейным порядком. Если $x \leqslant y$ и x не равно y, то мы пишем $x < y$. Определим отрезок $[a, b]$ как множество всех таких c, что $a \leqslant c \leqslant b$. Через $\mathbf{0}$ обозначим пустое множество с соответствующим линейным порядком, через $\mathbf{1}$ обозначим одноэлементное подмножество $\{0\}$ целых чисел, через $\mathbf{2}$ – подмножество $\{0, 1\}$ и так далее. Через $\mathbf{n}$ мы обозначаем подмножество $\{0, 1, \dots, n-1\}$ целых чисел с соответствующим отношением порядка.

3 Основные методы

3.1 Инварианты

Опишем все свойства частично упорядоченных множеств $(X, \leqslant)$, которые сохраняются при изоморфизме. Эти свойства выражаются только в терминах отношения $\leqslant$, поэтому и являются инвариантами.

Линейность. Частично упорядоченное множество $(X, \leqslant)$ называется линейно упорядоченным, если любые два элемента $x, y \in X$ сравнимы: $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$.

Существование наименьшего/наибольшего элемента. Элемент $x \in X$ называется наименьшим, если $\forall y \in X \ \ x \leqslant y$. Аналогично определяется наибольший элемент.

Существование минимального/максимального элемента. Элемент $x \in X$ называется минимальным, если верна импликация: $y \leqslant x \implies y = x$. Аналогично определяется максимальный элемент.

Существование предельного элемента. Элемент $x \in X$ называется предельным (слева), если множество $\{y \in X \mid y \leqslant x\}$ не пусто, но у x нет предшествующего элемента.

Плотность. Частично упорядоченное множество $(X, \leqslant)$ называется плотным, если в нём нет соседних элементов.
Счётность. Множество X называется счётным, если существует биекция $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$.
Аксиома полноты. Линейно упорядоченное множество $(X, \leqslant)$ удовлетворяет аксиоме полноты, если для любых непустых подмножеств A, B в X верна импликация

$$A \leqslant B \implies \exists \xi \in X : \ A \leqslant \xi \leqslant B.$$

Широкость. Будем говорить, что частично упорядоченное множество X является широким вправо, если для любого $x \in X$ существует такое $y \in X$, что $x < y$. Аналогично определяется широкость влево. Под широкостью будем понимать одновременную широкость вправо и влево.

3.2 Пространство отверстий

Чуть подробнее остановимся на акисоме полноты. Полнота $\mathbb{R}$ выводится из аксиом. Любое конечное множество полно. Множество $\mathbb{Z}$ полно: если $A \leqslant B$, то возьмём в качестве ξ наибольший элемент в A. Множество $\mathbb{Q}$ не полно: $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0, \ x^2 < 2\} \leqslant B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0, \ x^2 > 2\}$, но единственное число $\sqrt{2}$ между A и B не является рациональным.

Пусть X – *линейно упорядоченное* множество. Рассмотрим множество всех таких пар непустых подмножеств (A, B) в X, что $A \leqslant B$ и не существует такого $\xi \in X$, что $A \leqslant \xi \leqslant B$. Обозначим его за $H(X)$. Очевидно, что $H(X)$ пусто тогда и только тогда, когда X удовлетворяет аксиоме полноты. На множестве $H(X)$ введём отношение следующим образом: $(A, B) \leqslant (C, D)$, если $A \leqslant D$.
Предложение. Введённое отношение $\leqslant$ является отношением предпорядка, то есть рефлексивно и транзитивно.
Доказательство. Рефлексивность: Пусть $(A, B) \in H(X)$. Тогда $A \leqslant B$, то есть $(A, B) \leqslant (A, B)$. Транзитивность: Пусть $(A, B), (C, D), (E, F) \in H(X)$ и $(A, B) \leqslant (C, D), \ (C, D) \leqslant (E, F)$. Докажем, что $A \leqslant F$. Так как на X задан линейный порядок, то достаточно показать, что верна импликация $f \leqslant a \Rightarrow f = a$. Действительно, пусть $f \leqslant a$ для $a \in A$ и $f \in F$. Так как $(A, B) \leqslant (C, D)$, то $a \leqslant D$. Теперь возьмём $c \in C$. Если $a \leqslant c$, то (так как $C \leqslant F$) $a \leqslant f$, то есть, $a = f$. Если же $c \leqslant a$ для всех $c \in C$, то $C \leqslant a \leqslant D$, что противоречит тому, что между C и D ничего нет. Итак, мы показали, что $A \leqslant F$. ∎

Введём на множестве $H(X)$ отношение эквивалентности следующим образом: $(A, B) \sim (C, D)$, если $(A, B) \leqslant (C, D)$ и $(C, D) \leqslant (A, B)$. Легко понять, что оно рефлексивно и транзитивно, а симметричность следует из самого определения.

Рассмотрим фактормножество $\mathrm{Holes}(X) = H(X)/\sim$. Из определения $\sim$ следует, что $\mathrm{Holes}(X)$ вместе с индуцированным на фактормножество отношением $\leqslant$ является линейно упорядоченным множеством: рефлексивность и транзитивность следует из доказанного утверждения, а антисимметричность следует из определения $\sim$. Мы называем $\mathrm{Holes}(X)$ пространством отверстий линейно упорядоченного множества X. Мы ввели это определение специально для того, чтобы можно было далее воспользоваться основой теоремой о пространстве отверстий.

Теорема. Если $X \cong Y$, то $\mathrm{Holes}(X) \cong \mathrm{Holes}(Y)$.

Доказательство. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – изоморфизм. Тогда определим $g : \mathrm{Holes}(X) \longrightarrow \mathrm{Holes}(Y)$ по правилу $(A, B) \longmapsto (f(A), f(B))$.

Так как мы определяем функцию из фактормножества $H(X)/\sim$ в $H(Y)/\sim$, то требуется доказать корректность определения функции g (то есть показать, что g является функцией). Возьмём два представителя $(A, B) \sim (C, D)$ одного и того же класса эквивалентности. Покажем, что класс эквивалентности $g((A, B))$ в $H(Y)/\sim$ совпадает с классом эквивалентности $g((C, D))$. Действительно, так как $A \leqslant D$ и $C \leqslant B$, то $f(A) \leqslant f(D)$ и $f(C) \leqslant f(B)$, поэтому $g((A, B)) = (f(A), f(B)) \sim (f(C), f(D)) = g((C, D))$, что и требовалось. Значит, g – функция.

Кроме того, нужно доказать, что если $(A, B) \in \mathrm{Holes}(X)$, то $(f(A), f(B)) \in \mathrm{Holes}(Y)$. Действительно, если $A \leqslant B$, то $f(A) \leqslant f(B)$. Если $f(A) \leqslant \xi \leqslant f(B)$, то $A \leqslant f^{-1}(\xi) \leqslant B$, поэтому между $f(A)$ и $f(B)$ ничего не может быть.

Теперь покажем, что g изоморфизм. По-первых, если $g((A, B)) \sim g((C, D))$ (то есть $(f(A), f(B)) \sim (f(C), f(D))$), то $f(A) \leqslant f(D)$ и $f(C) \leqslant f(B)$, откуда $A \leqslant D$ и $C \leqslant B$ (так как f^{-1} тоже изоморфизм) и $(A, B) \sim (C, D)$. Значит, функция g инъективна. Во-вторых, если $(C, D) \in \mathrm{Holes}(Y)$, то, как нетрудно проверить, $(A, B) = (f^{-1}(C), f^{-1}(D)) \in \mathrm{Holes}(X)$ и $g((A, B)) = (C, D)$. Значит, g сюръективна. В-третьих, если $(A, B) \leqslant (C, D)$, то $A \leqslant D$, поэтому $f(A) \leqslant f(D)$ и $g((A, B)) = (f(A), f(B)) \leqslant (f(C), f(D)) = g((C, D))$. Значит, g монотонна. Аналогично доказывается, что g^{-1} монотонна. Таким образом, g изоморфизм и теорема доказана. ∎

Пример. Легко проверить, что следующие множества изоморфны

$$\begin{aligned} \mathrm{Holes}(\mathbb{N}) &\cong \mathbf{0}, \\ \mathrm{Holes}(\mathbb{Z}) &\cong \mathbf{0}, \\ \mathrm{Holes}(\mathbb{Q}) &\cong \mathbb{I}, \\ \mathrm{Holes}(\mathbb{I}) &\cong \mathbb{Q}, \\ \mathrm{Holes}(\mathbb{R}) &\cong \mathbf{0}, \\ \mathrm{Holes}(\{1, 2, \ldots, n\}) &\cong \mathbf{0}. \end{aligned}$$

4 Теоремы о сокращении

Здесь мы описываем наши полезные результаты, которые могут быть использованы в пункте 6 для $\times_{lex}$.

Теорема 1. Пусть C – полное непустое широкое частично упорядоченное множество. Тогда на C можно сокращать справа:

$$A \times_{lex} C \cong B \times_{lex} C \iff A \cong B. \tag{4.1}$$

Для доказательства теоремы мы сначала докажем три вспомогательных утверждения.

Лемма 1. Пусть $[a, b]$ – отрезок в полном множестве X. Тогда он сам полон.

Доказательство. Пусть $A \leqslant B$ – непустые подмножества $[a, b]$. Так как $A, B \subseteq X$, то существует такое $\xi \in X$, что $A \leqslant \xi \leqslant B$. Из транзитивности $\leqslant$ и того, что $a \leqslant A \leqslant B \leqslant b$, следует, что $\xi \in [a, b]$, что и требовалось доказать. ∎

Лемма 2. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – изоморфизм. Тогда $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

Доказательство. Докажем равенство двумя включениями. Первое включение: пусть $y = f(x)$ из $f([a, b])$. Тогда $a \leqslant x \leqslant b$. Так как f – изоморфизм, то $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, то есть $f(x) \in [f(a), f(b)]$. Второе включение: Пусть x из $[f(a), f(b)]$. Обозначим $y = f^{-1}(x)$. Так как $f(a) \leqslant x \leqslant f(b)$, то $a \leqslant y \leqslant b$ и $y \in [a, b]$. Тогда $x = f(y) \in f([a, b])$. ∎

Лемма 3. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – изоморфизм, $[a, b]$ – полный отрезок в X. Тогда $f([a, b])$ тоже полон.

Доказательство. Пусть $A \leqslant B$, где $A, B \subseteq f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Тогда $f(a) \leqslant A \leqslant B \leqslant f(b)$. Так как f – изоморфизм, то $a \leqslant f^{-1}(A) \leqslant f^{-1}(B) \leqslant b$. Так как $[a, b]$ полон, то найдётся $\xi \in [a, b]$ такой, что $f^{-1}(A) \leqslant \xi \leqslant f^{-1}(B)$. Тогда $A \leqslant f(\xi) \leqslant B$, что и требовалось. ∎

Доказательство теоремы 1. Если $f : A \longrightarrow B$ – изоморфизм, то пусть g отображает $A \times_{lex} C$ в $B \times_{lex} C$ по формуле $g((a, c)) = (f(a), c)$. Легко проверить, что это изоморфизм.

Обратно: пусть $f : A \times_{lex} C \longrightarrow B \times_{lex} C$ – изоморфизм. Если C пусто, то доказывать нечего. Зафиксируем $c_0 \in C$. Пусть $a \in A$ и $f(a, c_0) = (b, c)$. Тогда определим отображение $g : A \longrightarrow B$ по формуле $g(a) = b$. Проверим, что это изоморфизм.

▷ Инъективность. Предположим, что $g(x) = g(y) = b$ для $x, y \in A$ и $b \in B$. Тогда $f(x, c_0) = (b, c_1)$ и $f(y, c_0) = (b, c_2)$. Отрезок $[(b, c_1), (b, c_2)]$ можно отождествить с подотрезком в , а так как C полно, то по лемме 1 этот отрезок должен быть полным. С другой стороны, из леммы 3 следует, что $f^{-1}([(b, c_1), (b, c_2)]) = [(x, c_0), (y, c_0)] \subseteq A \times_{lex} C$ является полным. Если x не равно y, то возьмём два непустых множества $X = \{(s, t) \in A \times_{lex} C \mid x \leqslant s < y,\ c_0 \leqslant t\}$ и $Y = \{(y, t) \in A \times_{lex} C \mid t \leqslant c_0\}$. Легко видеть включение $X, Y \subseteq [(x, c_0), (y, c_0)]$. Покажем, что $X \leqslant Y$ и что между X, Y нет элементов отрезка. Действительно, пусть $(s, t) \in X$ и $(y, t') \in Y$. Тогда $s < y$, то есть $(s, t) \leqslant (y, t')$ и $X \leqslant Y$. Теперь допустим, что $X \leqslant (\xi_1, \xi_2) \leqslant Y$. Возьмём некоторые $(s, t) \in X$ и $(y, t') \in Y$. Если $\xi_1 = y$, то по широкости C найдётся такой z, что $z < \xi_2$. Так как $\xi_2 < t' \leqslant c_0$, то $(\xi_1, z) \leqslant (\xi_1, \xi_2)$ и $(\xi_1, z) \in Y$, что невозможно. Теперь допустим, что $\xi_1 < y$. Тогда $s \leqslant \xi_1$. По широкости C найдётся такой z, что $\xi_2 < z$. Тогда $c_0 \leqslant t \leqslant \xi_2 < z$, поэтому $(\xi_1, \xi_2) \leqslant (\xi_1, z)$ и $(\xi_1, z) \in X$, что невозможно. Значит, ничего между X и Y нет. Следовательно, $x = y$.

▷ Сюръективность. Пусть $y \in B$. Возьмём некоторое $t \in C$ и рассмотрим $r = f^{-1}(y, t) \in A \times_{lex} C$, где $r = (a, c)$. По аналогичным рассуждениям (C широкое и т.п.), если $f(a, c_0) = (y', c_0')$ и y не равен y', то образ (лемма 2) $[(y, t), (y', c_0)]$ полного (лемма 1) отрезка $[r, (a, c_0)]$ не будет полным, что противоречит лемме 3. Значит, $y' = y$ и $f(a, c_0) = (y, c_0')$, то есть $g(a) = y$.

▷ Монотонность. Пусть $x \leqslant y$ из A и $f(x, c_0) = (x', c_1)$, $f(y, c_0) = (y', c_2)$. Так как $(x, c_0) \leqslant (y, c_0)$, то, в силу монотонности f, $(x', c_1) \leqslant (y', c_2)$, то есть $g(x) = x' \leqslant y' = g(y)$.

▷ Монотонность обратной функции. Пусть $x' \leqslant y'$ из B, причём $g^{-1}(x') = x$ и $g^{-1}(y') = y$. Так как $f(x, c_0) = (x', c_1) \leqslant (y', c_2) = f(y, c_0)$, то, подействовав функцией f^{-1}, мы получим неравенство $(x, c_0) \leqslant (y, c_0)$, то есть $g^{-1}(x') = x \leqslant y = g^{-1}(y')$.

Таким образом, g – изоморфизм. Теорема доказана. ∎

В частности, в предыдущей теореме можно взять $C = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$. Однако, множество $\mathbb{N}$ не является широким, поэтому мы всё ещё не знаем, можно ли сокращать на $\mathbb{N}$ справа. В ходе решения, используя наши знания о

Holes, нам удалось получить следующий результат.
Предложение. Пусть на X задан линейный порядок. Тогда существует изоморфизм

$$\mathrm{Holes}(X \times_{lex} \mathbb{N}) \cong \mathrm{Holes}(X).$$

Доказательство. Линейность на X требуется для корректности определения Holes. Выберем какого-нибудь представителя класса эквивалентности $(A, B) \in \mathrm{Holes}(X \times_{lex} \mathbb{N})$. Обозначим "покрытие" множества X множеством A за $A_X := \{x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N} : \ (x, n) \in A\}$. Аналогично определим B_X. Тогда пусть φ отображает $\mathrm{Holes}(X \times_{lex} \mathbb{N})$ в $\mathrm{Holes}(X)$ по правилу $(A, B) \longmapsto (A_X, B_X)$. Проверим, что такое соотвествие осуществляет изоморфизм.

Сначала проверим, что φ является функцией. Пусть $(A, B) \sim (C, D)$. Так как $A \leqslant D$ и $C \leqslant B$, то $A_X \leqslant D_X$ и $C_X \leqslant B_X$, поэтому $(A_X, B_X) \sim (C_X, D_X)$ и $\varphi((A, B)) \sim \varphi((C, D))$.

Покажем, что $\varphi(A, B) = (A_X, B_X) \in Holes(X)$. Как уже было замечено, если $A \leqslant B$, то $A_X \leqslant B_X$. Осталось проверить, что между A_X и B_X ничего нет. Если $A_X \leqslant \xi \leqslant B_X$, то, легко проверить, $A \leqslant (\xi, 1) \leqslant B$, что противоречит тому, что между A и B ничего нет.

Докажем, что φ – изоморфизм. Во-первых, предположим, что $\varphi(A, B) \sim \varphi(C, D)$ (то есть $A_X \leqslant D_X$ и $C_X \leqslant B_X$). Покажем, что $(A, B) \sim (C, D)$. Пусть $a = (a', n_1) \in A$, $b = (b', n_2) \in B$, $c = (c', n_3) \in C$ и $d = (d', n_4) \in D$. Так как $A_X \leqslant D_X$, то $a' \leqslant d'$; так как $C_X \leqslant B_X$, то $c' \leqslant b'$, то есть $A \leqslant D$ и $C \leqslant B$, что и требовалось. Значит, φ инъективна. Во-вторых, предположим, что $(C, D) \in \mathrm{Holes}(X)$. Определим $A = \{(c, n) \mid c \in C, \ n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{(d, n) \mid d \in D, \ n \in \mathbb{N}\}$. Легко проверить, что $(A, B) \in Holes(X \times_{lex} \mathbb{N}\}$ и $\varphi((A, B)) = (C, D)$. Значит, φ сюръективна. В-третьих, если $(A, B) \leqslant (C, D)$, то $A \leqslant D$, откуда $\varphi(A, B) = (A_X, B_X) \leqslant (C_X, D_X) = \varphi((C, D))$. Значит, φ монотонна. Аналогично доказывается, что φ^{-1} монотонна. Таким образом, φ является изоморфизмом и утверждение доказано. ∎

Приняв во внимание основную теорему о пространстве отверстий, мы получаем что-то вроде слабой теоремы о сокращении на $\mathbb{N}$.
Следствие. Пусть на X и Y заданы линейные порядки. Если $A \times_{lex} \mathbb{N} \cong B \times_{lex} \mathbb{N}$, то $\mathrm{Holes}(A) \cong \mathrm{Holes}(B)$.
Доказательство. Достаточно подействовать Holes на изоморфизм $A \times_{lex} \mathbb{N} \cong B \times_{lex} \mathbb{N}$ и воспользоваться предыдущим утверждением. ∎

На самом деле, после доказательства этого утверждения нам удалось получить куда более сильный результат — теорему о сокращении на $\mathbb{N}$ для произвольных частично упорядоченных множеств.

Теорема 2. На $\mathbb{N}$ можно сокращать справа:

$$A \times_{lex} \mathbb{N} \cong B \times_{lex} \mathbb{N} \iff A \cong B. \tag{4.2}$$

Доказательство теоремы 2. Если $f : A \longrightarrow B$ – изоморфизм, то пусть g отображает $A \times_{lex} \mathbb{N}$ в $B \times_{lex} \mathbb{N}$ по формуле $g((a, n)) = (f(a), n)$. Легко проверить, что это изоморфизм.

Обратно: пусть $f : A \times_{lex} \mathbb{N} \longrightarrow B \times_{lex} \mathbb{N}$ – изоморфизм. Пусть $a \in A$ и $f(a, 1) = (b, n)$. Тогда определим отображение $g : A \longrightarrow B$ по формуле $g(a) = b$. Проверим, что это изоморфизм.

$\triangleright$ Инъективность. Предположим, что $g(x) = g(y) = b$ для $x, y \in A$ и $b \in B$. Тогда $f(x, 1) = (b, n_1)$ и $f(y, 1) = (b, n_2)$. Отождествляя отрезок $[(b, n_1), (b, n_2)]$ с подотрезком в $\mathbb{N}$, мы получаем, что он должен быть конечным. Значит, $f^{-1}([(b, n_1), (b, n_2)]) = [(x, 1), (y, 1)] \subseteq A \times_{lex} \mathbb{N}$ является конечным множеством. Но если $x < y$, то мы легко найдём в нём бесконечное подмножество $\{(x, t) \mid t \in \mathbb{N}\}$. Значит, $x = y$.

$\triangleright$ Сюръективность. Пусть $y \in B$. Рассмотрим элемент $r = f^{-1}(y, 1) \in A \times_{lex} \mathbb{N}$, где $r = (a, n)$. По аналогичным рассуждениям (любой отрезок в $\mathbb{N}$ конечен), если $f(a, 1) = (y', n')$ и y не равен y', то образ (лемма 2) $[(y, 1), (y', n')]$ конечного отрезка $[(a, n), (a, 1)]$ будет бесконечным, что невозможно. Значит, $y' = y$ и $f(a, 1) = (y, n')$, то есть $g(a) = y$.

$\triangleright$ Монотонность. Пусть $x \leqslant y$ из A и $f(x, 1) = (x', n_1)$, $f(y, c_0) = (y', n_2)$. Так как $(x, 1) \leqslant (y, 1)$, то, в силу монотонности f, $(x', n_1) \leqslant (y', n_2)$, то есть $g(x) = x' \leqslant y' = g(y)$.

$\triangleright$ Монотонность обратной функции. Пусть $x' \leqslant y'$ из B, причём $g^{-1}(x') = x$ и $g^{-1}(y') = y$. Так как $f(x, 1) = (x', n_1) \leqslant (y', n_2) = f(y, 1)$, то, подействовав функцией f^{-1}, мы получим неравенство $(x, 1) \leqslant (y, 1)$, то есть $g^{-1}(x') = x \leqslant y = g^{-1}(y')$.

Таким образом, g – изоморфизм. Теорема доказана. ∎

Важное замечание. Эта теорема может быть обобщена: мы пользовались только тем, что $\mathbb{N}$ непусто, от каждого элемента $n \in \mathbb{N}$ можно построить бесконечную возрастающую (или убывающую) цепочку $n = x_1 < x_2 < \ldots$ и тем, что любой отрезок в $\mathbb{N}$ является конечным. Так, мы обнаружили, что можно получить аналогичный результат (сокращение справа на C), если потребовать любое из следующих условий:

- C является широким влево или широким вправо и любой отрезок в C является конечным.
- C является широким влево или широким вправо и не содержит предельных слева или справа элементов.

В доказательстве биективности построенного отображения нам придётся пользоваться одним из этих условий. Но это не значит, что найденное нами условие сократимости на C является необходимым. Кроме того, мы не будем передоказывать эти утверждения.

4.1 Контрпримеры

Здесь мы покажем, что аналогичные теоремы о сокращении на $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ слева не всегда верны.
Пример. Существуют изоморфизмы

$$\mathbb{N} \times_{lex} \mathbf{1} \cong \mathbb{N} \times_{lex} \mathbf{2}, \qquad \mathbb{Z} \times_{lex} \mathbf{1} \cong \mathbb{Z} \times_{lex} \mathbf{2},$$

но $\mathbf{1} \ncong \mathbf{2}$.
Доказательство. Очевидно, что $A \times_{lex} 1 \cong A$. Легко проверить, что отображение f, заданное по правилу

$$f(n) = \left(\left[\frac{n+1}{2} \right], n \bmod 2 \right)$$

осуществляет оба изоморфизма между указанными множествами. ∎

Для $A = \mathbb{R}$ подобного изоморифизма не существует, так как в $\mathbb{R}$ нет соседних элементов, а в $\mathbb{R} \times_{lex} \mathbf{2}$ есть.

5 Решение

Пункт 1

Предложение. Пусть $f : M \longrightarrow N$ – изоморфизм. Тогда $M_{\leqslant x} = \{y \in M \mid y \leqslant x\}$ изоморфно $N_{\leqslant f(x)} = \{y \in N \mid y \leqslant f(x)\}$.
Доказательство. Будем стоить изоморфизм между $M_{\leqslant x}$ и $N_{\leqslant f(x)}$. Возьмём сужение h функции f на множество $M_{\leqslant x}$, заданное по формуле $h(a) = f(a)$. Докажем, что h является искомым изоморфизмом. Во-первых, если $y \leqslant x$, то $h(y) = f(y) \leqslant f(x)$, поэтому $h(M_{\leqslant x}) \subseteq N_{\leqslant f(x)}$. Во-вторых, сужение функции f^{-1} на $N_{\leqslant f(x)}$ отображается в $M_{\leqslant x}$ и является обратной функцией для h, так как $h(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y)) = y$ и $f^{-1}(h(y)) = f^{-1}(f(y)) = y$. Значит, h является монотонной биекцией (как сужение монотонной функции), обратная к которой тоже монотонна. Следовательно, h – искомый изоморфизм. ∎

Пункт 2

Предостережение. Ниже мы будем рассматривать символ $f(A)$ в двух значениях: если f отображает $\mathcal{P}(X)$ в $\mathcal{P}(X)$, то $f(A)$ – это просто образ A при этом отображении. Но если f отображает X в X, то за $f(A)$ обозначается объединение (по всем a из A) образов $f(a)$. Автор решения прекрасно понимает эту тонкость и поэтому просит рецензентов также обратить на неё внимание.

Покажем, что между перестановками множества X и изоморфизмами $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ на себя существует взаимно однозначное соответствие.

Сначала по каждой перестановке φ построим изоморфизм. Пусть f_φ отображает $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ в $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ по правилу $f_\varphi(A) = \varphi(A)$, для $A \in \mathcal{P}(X)$. Заметим, что так как φ – перестановка, то существует обратная перестановка φ^{-1}. Легко проверить, что $\varphi^{-1}(A) = f_\varphi^{-1}(A)$. Кроме того, f_φ и f_φ^{-1} монотонны. Значит, f_φ – изоморфизм.

Теперь по каждому изоморфизму $f : (\mathcal{P}(X), \subseteq) \longrightarrow (\mathcal{P}(X), \subseteq)$ построим перестановку φ_f множества X. Пусть $x \in X$. Заметим, что единственные множества, имеющие ровно два подмножества – это одноэлементные множества. Значит, при изоморфизме одноэлементное множество всегда переходит в одноэлементное множество. Более того, так как $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $f(A) \subseteq f(B)$, то, в частности, f сохраняет свойство множеств "иметь n элементов", поскольку в том случае, когда конечные множества имеют равное число подмножеств, они сами состоят из одинакового числа элементов. Итак, множество $f(\{x\})$ является одноэлементным: $f(\{x\}) = \{a\}$. Теперь понятно, как нужно определять перестановку φ_f: возьмём $\varphi_f(x) = a$ и докажем, что φ_f – биекция. Если $\varphi_f(x) = \varphi_f(y)$, то $f(\{x\}) = f(\{y\}) = \{a\}$, но f – инъекция, поэтому $\{x\} = \{y\}$ и $x = y$. Таким образом, φ_f – инъекция. Пусть $y \in X$. По предыдущим рассуждениям, прообраз одноэлементного множества является одноэлементным, поэтому $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$. Тогда, легко видеть, $\varphi(x) = y$. Значит, φ_f – сюръекция. Итого, φ_f – биекция, то есть перестановка.

Чтобы завершить описание всех изоморфизмов, нам нужно вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть $f : (\mathcal{P}(X), \subseteq) \to (\mathcal{P}(X), \subseteq)$ – изоморфизм. Тогда

$$f(A) = \bigcup_{a \in A} f(\{a\}). \tag{5.1}$$

Доказательство. Докажем равенство двумя включениями. Пусть $x \in f(A)$. Тогда $\{x\} \subseteq f(A)$, что эквивалентно $f^{-1}(\{x\}) \subseteq A$. Кроме того,

$f^{-1}(\{x\})$ является одноэлементным множеством (скажем, $\{a\}$ для $a \in A$). Тогда

$$x \in \{x\} = f(\{a\}) \subseteq \bigcup_{a \in A} f(\{a\}).$$

Таким образом, $f(A) \subseteq \bigcup_{a \in A} f(\{a\})$. Обратно: пусть $x \in \bigcup_{a \in A} f(\{a\})$. Тогда $x \in f(\{a\})$ для некоторого $a \in A$. Значит, $\{x\} = f(\{a\})$. Так как $\{a\} \subseteq A$, то $f(\{a\}) \subseteq f(A)$, то есть $x \in \{x\} \subseteq f(\{a\}) \subseteq f(A)$. ■

Мы определили две функции: $\varphi \longmapsto f_\varphi$ из множества всех перестановок X в множество всех изоморфизмов $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ и $f \longmapsto \varphi_f$ из множества всех изоморфизмов $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ в множество всех перестановок X. Покажем, что $f_{\varphi_f} = f$ и $\varphi_{f_\varphi} = \varphi$, откуда будет получена биекция между двумя рассматриваемыми множествами.

Первое равенство следует из леммы:

$$f_{\varphi_f}(A) = \varphi_f(A) = \bigcup_{a \in A} \{\varphi_f(a)\} = \bigcup_{a \in A} f(\{a\}) \overset{(5.1)}{=} f(A).$$

Для доказательства второго равенства введем локальное обозначение: определим $\square\{a\}$ как единственный элемент множества $\{a\}$. Тогда

$$\varphi_{f_\varphi}(x) = \square f_\varphi(\{x\}) = \square\varphi(\{x\}) = \varphi(x),$$

что и требовалось доказать. Таким образом, мы установили биекцию между множеством всех перестановок X и множеством всех изоморфизмов на $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. В частности, если X конечно и $|X| = n$, то количество изоморфизмов равно $n!$.

Пункт 3

Предложение. Множества $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N} \times_{nat} \mathbb{N}, \mathbb{N} \times_{lex} \mathbb{N}, \mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ попарно неизоморфны.

Доказательство. Выделим уникальные наборы свойств:

Множество	лин	наим	мин	предельн	Holes
$\mathbb{N}$	Да	Да		Нет	
$\mathbb{Z}$	Да	Нет			$\mathbf{0}$
$\mathbb{N} \times_{nat} \mathbb{N}$	Нет		Да		
$\mathbb{N} \times_{lex} \mathbb{N}$	Да	Да		Да	
$\mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z}$	Нет		Нет		
$\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}$	Да	Нет			$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	Да	Нет			$\mathbb{I}$

В таблице столбцы лин, наим, мин, предельн, Holes, означают, соответственно, линейность, существование наименьшего элемента, существование минимального элемента, существование предельного элемента и пространство отверстий. Таких свойств достаточно для того, чтобы доказать попарную неизоморфность. ∎

Пункт 4

Предложение. Множества $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{R}$ попарно неизоморфны.
Доказательство. Выделим уникальные наборы свойств:

Множество	счёт	плот	Holes
$\mathbb{Q}$	Да	Да	
$\mathbb{Z}$	Да	Нет	
$\mathbb{R}$	Нет	Да	$\mathbf{0}$
$\mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{R}$	Нет	Да	$\mathbb{R}$

В таблице столбцы счёт, плот, полн, Holes означают, соответственно, счётность, плотность и пространство отверстий.

Таких свойств достаточно для того, чтобы доказать попарную неизоморфность. ∎

Итак, множества

$$\{0\}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{R}$$

попарно неизоморфны. По первой теореме о сокращении для $C = \mathbb{R}$, множества

$$\mathbb{R}, \mathbb{Q} \times_{lex} \mathbb{R}, \mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{R}, \mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{R}, \mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{R}$$

попарно неизоморфны. Осталось показать, что $\mathbb{Q}$ попарно не изоморфно этим множествам. Но это очевидно: $\mathbb{Q}$ счётно, а все остальные множества – нет. Таким образом, в этом пункте все множества попарно неизоморфны.

Пункт 5

Хотелось бы воспользоваться теоремой о сокращении справа на $\mathbb{Z}$ в $\times_{nat}$, но такой теоремы в общем случае нам доказать не удалось. Поэтому придётся доказывать неизоморфность напрямую.

Докажем, что не существует изоморфизма между $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}) \times_{nat} \mathbb{Z}$ и $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{N}) \times_{nat} \mathbb{Z}$. Допустим, что f – такой изоморфизм и покажем, что такое невозможно.

Сначала докажем, что любое линейно упорядоченное подмножество X в $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{N}) \times_{nat} \mathbb{Z}$ является полным. Пусть $A, B \subseteq X$ и $A \leqslant B$. Рассмотрим проекции

$$\begin{aligned}
&X_1 = \{x \in \mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{N} \mid \exists n : \quad (x, n) \in X\} \subseteq \mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{N},\\
&X_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists x : \quad (x, n) \in X\} \subseteq \mathbb{Z},\\
&A_1 = \{x \in \mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{N} \mid \exists n : \quad (x, n) \in A\} \subseteq X_1,\\
&A_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists x : \quad (x, n) \in A\} \subseteq X_2,\\
&B_1 = \{x \in \mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{N} \mid \exists n : \quad (x, n) \in B\} \subseteq X_1,\\
&B_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists x : \quad (x, n) \in B\} \subseteq X_2.
\end{aligned}$$

Тогда $A_1 \leqslant B_1$ и $A_2 \leqslant B_2$. Легко проверить, что X_1 и X_2 удовлетворяют аксиоме полноты (в общем случае, разумеется, подмножество полного не обязательно полно). Значит, существуют $\xi_1 \in X_1$ и $\xi_2 \in X_2$ такие, что $A_1 \leqslant \xi_1 \leqslant B_1$ и $A_2 \leqslant \xi_2 \leqslant B_2$. Тогда, очевидно, $(\xi_1, \xi_2) \in X$ и $A \leqslant (\xi_1, \xi_2) \leqslant B$, что и требовалось.

С одной стороны, $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}) \times_{nat} \{0\} \cong \mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}$ и $\mathrm{Holes}(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. С другой стороны, сужение f осуществляет изоморфизм между $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}) \times_{nat} \{0\}$ и образом $f((\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}) \times_{nat} \{0\})$. Таким образом, в $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{N}) \times_{nat} \mathbb{Z}$ нашлось линейно упорядоченное подмножество с нетривиальным пространством отверстий, хотя мы только что показали, что любое линейно упорядоченное подмножество в $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{N}) \times_{nat} \mathbb{Z}$ является полным. Значит, изоморфизма f не существует.

Докажем, что не существует изоморфизма между $\mathbb{Z} \times_{lex} (\mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z})$ и $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{N}) \times_{nat} \mathbb{Z}$.

Сначала докажем, что в $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{N}) \times_{nat} \mathbb{Z}$ не существует строго убывающего ограниченного снизу набора элементов, то есть бесконечной цепочки $x < \ldots < x_3 < x_2 < x_1$ (то есть любая такая цепочка стабилизируется в нестрого убывающую). Действительно, допустим, что такая есть. Рассмотрим проекции этой ограниченной последовательности на $\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ и обозначим их за $y < \ldots < y_3 < y_2 < y_1$ и $z < \ldots < z_3 < z_2 < z_1$. Очевидно, в $\mathbb{Z}$ такой цепочки z_i нет. Значит, начиная с некоторого места, $z_{n+1} = z_n$ для всех n. Аналогично, легко понять, что цепочка y_i в $\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{N}$ должна стабилизироваться. Следовательно, и цепочка x_i должна стабилизироваться, что и требовалось.

Наконец, в $\mathbb{Z} \times_{lex} (\mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z})$ такая цепочка, очевидно, есть. Например, $x_i = (0, (-i, 0))$. Значит, множества $\mathbb{Z} \times_{lex} (\mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z})$ и $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{N}) \times_{nat} \mathbb{Z}$ не изоморфны.

Теперь докажем неизоморфность $\mathbb{Z} \times_{lex} (\mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z})$ и $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}) \times_{nat} \mathbb{Z}$. Рассмотрим множество $Inc_{\mathbb{Z} \times_{lex} (\mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z})}$ всех несравнимых с $(0, 0, 0)$ элементов в $\mathbb{Z} \times_{lex} (\mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z})$ и множество $Inc_{(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}) \times_{nat} \mathbb{Z}}$ всех несравнимых с $(0,0,0)$ элементов в $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}) \times_{nat} \mathbb{Z}$. Покажем, что в $Inc_{\mathbb{Z} \times_{lex} (\mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z})}$ любая цепочка вида $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x$ стабилизируется.

Действительно, пусть $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x$ и все элементы x_i не сравнимы с $(0,0,0)$. Тогда $x_i = (0, x_i', x_i'')$, где $x_i' < 0$ и $x_i'' > 0$ или $x_i' > 0$ и $x_i'' < 0$. Тогда $x_i' < x_1$ и $x_i'' < x_2$, где $x = (0, x_1, x_2)$. Но так как x_i' и x_i'' можно отождествить в последовательностями в $\mathbb{Z}$, то они обязаны стабилизироваться. Значит, и x_i обязано стабилизироваться.

Теперь покажем, что в $Inc_{(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}) \times_{nat} \mathbb{Z}}$ существуют нестабилизирующиеся цепочки возрастающих ограниченных элементов. Например, можно взять $x_i = (-1, i, 1)$. Легко проверить, что эта цепочка ограничена элементом $(0,0,1)$ и является возрастающей. Таким образом, $\mathbb{Z} \times_{lex} (\mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z})$ и $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}) \times_{nat} \mathbb{Z}$ не изоморфны.

Итак, в пункте 5 все множества не изоморфны.

Пункт 6

Легко проверить, что

$$(A \times_{lex} B) \times_{lex} C \cong A \times_{lex} (B \times_{lex} C)$$

и

$$(A \times_{nat} B) \times_{nat} C \cong A \times_{nat} (B \times_{nat} C)\,,$$

то есть умножения $\times_{lex}$ и $\times_{nat}$ ассоциативны. Как показал пункт 5, при расстановке скобок в смешанном произведении $\times_{lex}$ и $\times_{nat}$ получаются разные частично упорядоченные множества. Значит, контролировать изоморфность двух множеств, получающихся с помощью двух таких произведений, не просто. Кроме того,

$$A \times_{nat} B \cong B \times_{nat} A,$$

так что умножение $\times_{nat}$ коммутативно. Однако $\times_{lex}$, не коммутативно, как показывает пример $\mathbb{N} \times_{lex} \mathbb{R}$: пространство отверстий $\mathrm{Holes}(\mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{N})$ изоморфно $\mathbb{R}$, а $\mathrm{Holes}(\mathbb{N} \times_{lex} \mathbb{R}) \cong \mathbb{N}$, как нетрудно видеть. Итого, остаётся пользоваться теоремами о сокращении.