Лаборатория Непрерывного Математического Образования
IV Петербургский турнир юных математиков
Санкт-Петербург, 21 – 26 марта 2016 года

Задача 7
Учимся считать

Алексеев Илья Сергеевич, команда ЛНМО

Аннотация

В этой статье было найдено решение пунктов $1, 2$, после чего было показано, как обобщить полученные результаты (пункт 3). Было показано, как вычислить коэффициенты $a_{2,2,2}$ многочленов из пункта 4 и их корни. Была доказана интерполяционная формула Лагранжа из пункта 5, а также была доказана аналогичная интерполяционная формула для многочлена от n переменных произвольной степени. Было найдено явное выражение произвольного коэффициента многочлена от n переменных через его значение в заданных точках (пункты $6, 7$). Было найдено требуемое представление старшего коэффициента многочена из пункта 8 в виде произведения и частного некоторых факториалов, из которого было получено несколько загадочных тождеств. Их удалось обобщить, получив загадочное представление знакопеерменной суммы биномиальных коэффициентов степени s.

1 Постановка задачи

Пусть F — поле. Целью этой статьи является исследование следующих вопросов:

1. Посчитайте, чему равно

$$-\binom{b+1}{0}\binom{b+c}{b-1}\binom{c+1}{c-1}+\binom{b+1}{1}\binom{b+c}{b}\binom{c+1}{c}-\binom{b+1}{2}\binom{b+c}{b+1}\binom{c+1}{c+1}.$$

2. Представьте следующие числа в виде произведения и частного некоторых факториалов:

$$\binom{4}{0}^3-\binom{4}{1}^3+\binom{4}{2}^3-\binom{4}{3}^3+\binom{4}{4}^3$$

и

$$\binom{6}{0}^3-\binom{6}{1}^3+\binom{6}{2}^3-\binom{6}{3}^3+\binom{6}{4}^3-\binom{6}{5}^3+\binom{6}{6}^3$$

3. Обобщите полученные результаты без строгого доказательства.

4. Пусть f — многочлен нескольких переменных. Его степенью будем называть сумму степеней многочленов по каждой переменной. Коэффициент при мономе $x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}$ обозначим за $a_{k_1,\dots,k_n}$.

   Посчитайте, чему равен коэффициент $a_{2,2,2}$ многочлена $f(x,y,z) = (x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$. А многочлена $f(x,y,z) = (x-y)(x-y-1)(y-z)(y-z-1)(z-x)(z-x-1)$? В каких целочисленных точках куба $[0,3]^3$ эти многочлены принимают ненулевые значения? Что можно сказать про значения этих многочленов в целых точках данного куба?

5. Докажите интерполяционную формулу Лагранжа: если A — произвольное подмножество поля F размера $d+1$, а f — многочлен степени $n \le d$, то

$$f(x) = \sum_{a\in A} f(a) \prod_{\substack{c\in A\\ c\neq a}} \frac{x-c}{a-c}.$$

6. Пусть $f \in F[x,y]$ — многочлен от двух переменных суммарной степени $\deg f = d_1 + d_2$, а $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ — произвольные подмножества F размера $n > d_1$, $m > d_2$. Тогда
$$a_{d_1,d_2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{f(x_i, y_j)}{\phi_1'(x_i)\phi_2'(y_j)},$$
где a_{d_1,d_2} — коэффициент f при мономе $x^{d_1}y^{d_2}$ и
$$\phi_1(z) = \prod_{x \in X}(z - x) \qquad \phi_2(z) = \prod_{y \in Y}(z - y).$$

7. Постарайтесь усилить и доказать теорему из пункта 6. Можете ли Вы придумать способ выразить коэффициент многочлена при произвольном мономе через его значение в заданных точках?

8. Постарайтесь посчитать, чему равен коэффициент $a_{n,n,n}$ многочлена $f(x,y,z) = (x-y)^n(y-z)^n(z-x)^n$ двумя разными способами и получить отсюда загадочное тождество.

9. Постарайтесь придумать тождество, обобщающее все тождества этой задачи, и доказать его.

2 Интерполяция

Пусть $f \in F[x]$ — многочлен с коэффициентами из поля F и A — подмножество F, где $\deg f < |A|$.

Теорема 2.1. *Значение многочлена f в любой точке можно выразить через значения на множестве A. Точнее, для любого x из F выполнено:*
$$f(x) = \sum_{a \in A} f(a) \prod_{\substack{c \in A \\ c \neq a}} \frac{x - c}{a - c}. \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим многочлен из правой части за $g(x)$. Рассмотрим вспомогательный многочлен $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Легко проверить, что выполнено неравенство $\deg \varphi < |A|$, и $\forall a \in A$ выполнено равенство $f(a) = 0$. По основной теореме алгебры ненулевой многочлен может иметь корней не больше, чем его степень, поэтому φ тождественно равен нулю, то есть $f \equiv g$. $\square$

Рассмотрим многочлен двух переменных $f \in F[x,y]$ суммарной степени $\deg f = d_1 + d_2$. А именно,

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{d_1} \sum_{j=0}^{d_2} a_{i,j} x_1^i x_2^j,$$

для некоторых $a_{i,j} \in F$. Рассмотрим такие подмножества X, Y в F, что $|X| = n > d_1$ и $|Y| = m > d_2$.

Лемма 2.2. *Пусть для любых $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено равенство $f(x,y) = 0$. Тогда $f \equiv 0$.*

Доказательство. Для $y \in Y$ рассмотрим многочлен одной переменной $\varphi_y(t) = f(t,y)$ степени $\deg \varphi_y \leq d_1 < |X|$. Так как для любого $x \in X$ выполнено равенство $\varphi_y(x) = 0$, то $\varphi_y \equiv 0$.

Пусть теперь $(a,b) \in F \times F$. Рассмотрим многочлен $\psi(t) = f(a,t)$ степени $\deg \psi \leq d_2 < |Y|$. Так как для любого $y \in Y$ выполнено равенство $\psi(y) = f(a,y) = \varphi_y(a) = 0$, то $\psi \equiv 0$. Поэтому $\psi(b) = f(a,b) = 0$, что и требовалось доказать. □

Введём обозначение: $\phi_1(z) = \prod_{x \in X} (z - x)$ и $\phi_2(z) = \prod_{y \in Y} (z - y)$. Легко видеть, что $\phi_1'(x_i) = \prod_{k \neq i} (x_i - x_k)$ и $\phi_2'(y_j) = \prod_{k \neq j} (y_i - y_k)$.

Теорема 2.3. *Значение многочлена f в любой точке можно выразить через значения на множестве $X \times Y$. Точнее, для любой пары (x,y) из $F \times F$ выполнено:*

$$f(x,y) = \sum_{a \in X} \sum_{b \in Y} f(a,b) \prod_{\substack{c \in X \\ c \neq a}} \prod_{\substack{d \in Y \\ d \neq b}} \frac{(x-c)(y-d)}{\phi_1'(a)\ \phi_2'(b)} \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим многочлен из правой части за g. Рассмотрим вспомогательный многочлен $\varphi(x,y) = f(x,y) - g(x,y)$. Легко проверить, что суммарная степень φ не превосходит $d_1 + d_2 < n + m$. Кроме того, $\forall x, y \in X \times Y$ выполнено равенство $\varphi(x,y) = 0$. По лемме 2.2 из этого следует, что φ тождественно равен нулю, то есть $f \equiv g$. □

Рассмотрим многочлен от n переменных $f \in F[x_1, \ldots, x_n]$ суммарной степени $\deg f = \sum_{i=1}^{n} d_i$. А именно,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

для некоторых $a_{i_1,\dots,i_n} \in F$. Рассмотрим такие подмножества $X_1,\dots,X_n$ в F, что $|X_i| = k_i > d_i$.

Лемма 2.4. *Пусть для любых $x_i \in X_i$ выполнено равенство $f(x_1,\dots,x_n) = 0$. Тогда $f \equiv 0$.*

Доказательство. Проведём индукцию по количеству переменных многочлена f. Случай $n = 2$ составляет содержание леммы 2.2. Пусть теперь утверждение леммы выполнено для любого многочлена от $n-1$ переменной. Покажем, что оно выполнено и для многочлена f от n переменных.

Для $x \in X_n$ рассмотрим многочлен $n-1$ переменной $\varphi_x(t_1,\dots,t_{n-1}) = f(t_1,\dots,t_{n-1},x)$. Так как для любых $x_1,\dots x_{n-1}$ из $X_1,\dots,X_{n-1}$ выполнено равенство $\varphi_x(x_1,\dots,x_{n-1}) = 0$, то по индукционному предположению $\varphi_x \equiv 0$.

Пусть теперь $(a_1,\dots,a_n) \in F \times F$. Рассмотрим многочлен $\psi(t) = f(a_1,\dots,a_{n-1},t)$. Так как для любого $x \in X_n$ выполнено равенство $\psi(x) = f(a_1,\dots,a_{n-1},x) = \varphi_x(a_1,\dots,a_{n-1}) = 0$, то $\psi \equiv 0$. Поэтому $\psi(a_n) = f(a_1,\dots,a_{n-1},a_n) = 0$, что и требовалось доказать. □

Введём обозначение:

$$\phi_i(z) = \prod_{x\in X_i}(z-x).$$

Пусть $x_i \in X_i$. Легко проверить, что

$$\phi_i'(x_i) = \prod_{\substack{x\in X_i\\ x\neq x_i}}(x_i-x).$$

Теорема 2.5. *Значение многочлена f в любой точке можно выразить через значения на множестве $X_1\times\dots\times X_n$. Точнее, для любого $(x_1,\dots,x_n)$ из $F\times\dots\times F$ выполнено:*

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{a_i\in X_i} f(a_1,\dots,a_n)\prod_{\substack{c_i\in X_i\\ c_i\neq a_i}}\prod_{j=1}^{n}\frac{x_j-c_j}{\phi_j'(a_j)}. \qquad (3)$$

Доказательство. Обозначим многочлен из правой части за g. Рассмотрим вспомогательный многочлен $\varphi = f - g$. Легко проверить, что суммарная степень φ не превосходит $\sum d_i < \sum k_i$. Кроме того, $\forall x_1,\dots,x_n \in X_1\times\dots\times X_n$ выполнено равенство $\varphi(x_1,\dots,x_n) = 0$. По лемме 2.4 из этого следует, что φ тождественно равен нулю, то есть $f \equiv g$. □

3 Вычисление коэффициентов многочлена

Пусть $x_1, \dots, x_{n+1}$ — различные элементы. Определителем Вандермонда называется определитель следующей матрицы

$$\begin{vmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x_i^n & x_i^{n-1} & \dots & x_i^2 & x_i & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \dots & x_{n+1}^2 & x_{n+1} & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i). \tag{4}$$

Доказательство этой формулы может быть найдено в [1] (стр. 435).

Рассмотрим основные симметрические многочлены:

$$\sigma_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 \le \dots \le i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k},$$

где $\sigma_0(x_1, \dots, x_n) = 1$. Эти многочлены характеризуются следующим тождеством:

$$\prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\sigma_{n-k}(x_1, \dots, x_n)x^k. \tag{5}$$

3.1 Коэффициенты многочлена одной переменной

Пусть

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

где a_k из поля F. Рассмотрим подмножество $X = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ в F. Первой задачей нашего исследования является нахождение явной формулы выражения коэффициентов многочлена одной переменной через его значение в заданных точках.

Теорема 3.1. *Произвольный коэффициент многочлена f можно выразить через его значения на множестве X. А именно,*

$$a_k = (-1)^{n-k} \sum_{t=1}^{n+1} f(x_t) \frac{\sigma_{n-k}(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_{n+1})}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} (x_i - x_j)}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую квадратную систему уравнений относительно коэффициентов $a_n, \dots, a_0$ многочлена f :

$$\begin{cases} a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 & = & f(x_1) \\ a_n x_2^n + a_{n-1} x_2^{n-1} + \ldots + a_1 x_2 + a_0 & = & f(x_2) \\ \vdots & & \vdots \\ a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \ldots + a_1 x_i + a_0 & = & f(x_i) \\ \vdots & & \vdots \\ a_n x_{n+1}^n + a_{n-1} x_{n+1}^{n-1} + \ldots + a_1 x_{n+1} + a_0 & = & f(x_{n+1}) \end{cases}$$

Легко видеть, что определитель системы коэффициентов Δ является определителем Вандермонда. Рассмотрим следующий определитель δ_k матрицы $(n+1) \times (n+1)$, где $k \in \{1, \dots, n+1\}$:

$$\delta_k = \begin{vmatrix} x_1^n & \dots & x_1^{k-1} & f(x_1) & x_1^{k+1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^n & \dots & x_2^{k-1} & f(x_2) & x_2^{k+1} & \dots & x_2 & 1 \\ \vdots & & & & & & \vdots & \\ x_i^n & \dots & x_i^{k-1} & f(x_i) & x_i^{k+1} & \dots & x_i & 1 \\ \vdots & & & & & & \vdots & \\ x_{n+1}^n & \dots & x_{n+1}^{k-1} & f(x_{n+1}) & x_{n+1}^{k+1} & \dots & x_{n+1} & 1 \end{vmatrix}$$

Для преобразования δ_k применим метод разложения по k–ому столбцу:

$$\delta_k = \sum_{t=1}^{n+1} (-1)^{t+k} f(x_t) \omega_{t,k},$$

где

$$\omega_{t,k} = \begin{vmatrix} x_1^n & \dots & x_1^{k-1} & x_1^{k+1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ x_{t-1}^n & \dots & x_{t-1}^{k-1} & x_{t-1}^{k+1} & \dots & x_{t-1} & 1 \\ x_{t+1}^n & \dots & x_{t+1}^{k-1} & x_{t+1}^{k+1} & \dots & x_{t+1} & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ x_{n+1}^n & \dots & x_{n+1}^{k-1} & x_{n+1}^{k+1} & \dots & x_{n+1} & 1 \end{vmatrix}.$$

Здесь мы опираемся на одно важное утверждение из [1] (стр. 434, лемма 2). Имеет место следующее соображение: если $x_i = x_j$, то $\omega_{t,k} = 0$. Поэтому $\omega_{t,k}$, как многочлен, должен делиться на всевозможные разности $\prod_{\substack{s<r \\ s\neq t \\ r\neq t}} (x_r - x_s)$. Если $k = n$, то, легко проверить, $\omega_{t,k} = \prod_{\substack{s<r \\ s\neq t \\ r\neq t}} (x_r - x_s)$, так как степени и корни этих двух многочленов совпадают.

Пусть теперь $0 \le k < n$. Рассмотрим вспомогательный многочлен $\varphi(x) = \prod_{s\neq t}(x - x_s)$, корнями которого являются элементы x_s, где $s \neq t$. Предположим, что $\sigma_{n-k}(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_{n+1}) = 0$. В силу равенства (5) это эквивалентно тому, что у многочлена $\varphi(x)$ коэффициент при мономе x^k равен нулю. Пусть $i, j \neq t$. Так как $\varphi(x_i) = \varphi(x_j) = 0$, то строки i, j линейно зависимы. Значит, если $\sigma_{n-k}(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_{n+1}) = 0$, то $\omega_{t,k} = 0$. Сравнивая знаки при соответствующих степениях, легко проверить, что из этого следует следующее равенство:

$$\omega_{t,k} = (-1)^{n-k}\sigma_{n-k}(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_{n+1}) \prod_{\substack{s<r \\ s\neq t \\ r\neq t}} (x_r - x_s).$$

Воспользуемся методом Крамера (см. [1], стр. 89) и найдём решение a_k

исходной системы. Из формулы (4) следует, что

$$a_k = \frac{\delta_k}{\Delta} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n+1} (-1)^{t+k} f(x_t) (-1)^{n-k} \sigma_{n-k}(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_{t+1}, \ldots, x_{n+1}) \prod\limits_{\substack{s<r \\ s\neq t \\ r\neq t}} (x_r - x_s)}{\prod\limits_{i<j} (x_j - x_i)} =$$

$$= \sum_{t=1}^{n+1} (-1)^{n-k} f(x_t) \frac{\sigma_{n-k}(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_{t+1}, \ldots, x_{n+1})}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} (x_i - x_j)},$$

что и требовалось доказать. □

Замечание. Доказательство предыдущего утверждения корректно только в том случае, если $|X| = \deg f + 1$. Если $|X| > \deg f$, то это аналогичное тождество можно получить, сравнивая коэффициенты многочленов в равенстве (1). Если $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, где $m > n$, то

$$a_k = (-1)^{m-1-k} \sum_{t=1}^{m} f(x_t) \frac{\sigma_{m-1-k}(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_{t+1}, \ldots, x_m)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} (x_i - x_j)}.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться второй идеей нахождения коэффициентов многочлена, хотя метод Крамера является основополагающим в этом вопросе.

3.2 Коэффициенты многочлена двух переменных

Рассмотрим многочлен двух переменных $f \in F[x, y]$ суммарной степени $\deg f = d_1 + d_2$:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{d_1} \sum_{j=0}^{d_2} a_{i,j} x_1^i x_2^j,$$

для некоторых $a_{i,j} \in F$.

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ — подмножества F, где $n > d_1$ и $m > d_2$.

Теорема 3.2. *Произвольный коэффициент многочлена f можно выразить через его значения на множестве $X \times Y$. А именно,*

$$a_{u,v} = (-1)^{n+m-u-v} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) \frac{\sigma_{n-1-u}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \cdot \sigma_{m-1-v}(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m)}{\phi_1'(x_i)\phi_2'(y_j)}.$$

Доказательство. Рассмотрим равенство (2) для многочлена f. Легко видеть, что в этом представлении коэффициент $a_{u,v}$ при мономе $x^u y^v$ является суммой соответствующих коэффициентов мономов $x^u y^v$ многочленов

$$\varphi_{i,j}(x,y) = \frac{f(x_i, y_j)}{\phi_1'(x_i)\ \phi_2'(y_j)} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{m} (x - x_k)(y - y_l).$$

В свою очередь, для того, чтобы вычислить коэффициент $x^u y^v$ этого многочлена, нужно вычислить коэффициенты при x^u и y^v многочленов $g_1(x) = \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (x - x_k)$ и $g_2(y) = \prod\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{m} (y - y_l)$. В силу тождества (5) получаем, что коэффициент при мономе $x^u y^v$ многочлена $\varphi_{i,j}(x,y)$ равен

$$\begin{aligned} b_{u,v}^{i,j} = \frac{f(x_i, y_j)}{\phi_1'(x_i)\phi_2'(y_j)} &\cdot (-1)^{n-1-u} \sigma_{n-1-u}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &\cdot (-1)^{m-1-v} \sigma_{m-1-v}(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m), \end{aligned}$$

откуда и получается утверждение теоремы. □

Из этой теоремы можно получить частичное решение пункта 6 :

Следствие 3.3. *Пусть $|X| = d_1 + 1$ и $|Y| = d_2 + 1$. Коэффициент a_{d_1,d_2} многочлена f можно выразить через его значения на множестве $X \times Y$. А именно,*

$$a_{d_1,d_2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{f(x_i, y_j)}{\phi_1'(x_i)\phi_2'(y_j)},$$

Доказательство. Так как $\sigma_0(x_1, \dots, x_n) = 1$, то это равенство сразу получается из теоремы 3.2 при $n = d_1 + 1$ и $m = d_2 + 1$. □

3.3 Коэффициенты многочлена нескольких переменных

Рассмотрим многочлен n переменных $f \in F[x_1, \ldots, x_n]$ суммарной степени $\deg f = \sum_{i=1}^{n} d_i$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

для некоторых $a_{i_1,\ldots,i_n} \in F$, $i_j \in \{0, \ldots, k_j\}$. Рассмотрим такие подмножества $X_1, \ldots, X_n$ в F, что $|X_i| = k_i > d_i$.

Для $x_1 \ldots, x_{k_i}$ из X_i будем записывать основные симметрические многочлены в краткой форме:

$$\sigma(\hat{x}_t) \coloneqq \sigma(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_{t+1}, \ldots, x_{k_i}).$$

Теорема 3.4. *Произвольный коэффициент многочлена f можно выразить через его значения на множестве $X_1 \times \cdots \times X_n$. А именно,*

$$a_{u_1,\ldots,u_n} = \sum_{x_i \in X_i} \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \phi'_j(x_j)} \prod_{s=1}^{n} (-1)^{k_s-1-u_s} \sigma_{k_s-1-u_s}(\hat{x}_s).$$

Доказательство. Доказательство этого утверждения ничем не отличается от доказательства теоремы 3.2. □

Следствие 3.5. *Пусть $|X_i| = d_i + 1$. Коэффициент $a_{d_1,\ldots,d_n}$ многочлена f можно выразить через его значения на множестве $X_1 \times \cdots \times X_n$. А именно,*

$$a_{d_1,\ldots,d_n} = \sum_{x_i \in X_i} \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \phi'_j(x_j)}.$$

Доказательство. Так как $\sigma_0(x_1, \ldots, x_n) = 1$, то это равенство сразу получается из теоремы 3.4 при $|X_i| = d_i + 1$.

□

Следствие 3.6. *Пусть $d_i = 2m$ и $|X_i| \coloneqq k_i = 2m + 1$. Коэффициент $a_{m,\ldots,m}$ многочлена f можно выразить через его значения на множестве $X_1 \times \cdots \times X_n$. А именно,*

$$a_{m,\ldots,m} = \sum_{x_i \in X_i} \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \phi'_j(x_j)} \prod_{s=1}^{n} (-1)^m \sigma_m(\hat{x}_s).$$

Доказательство. Достаточно взять $d_i = 2m$, $k_i = d_i + 1$ в теореме 3.4. □

4 Биномиальные коэффициенты

Простые вычисления показывают, что задача 1 имеет следующее решение

$$\begin{aligned}
&-\binom{b+1}{0}\binom{b+c}{b-1}\binom{c+1}{c-1}\\
&+\binom{b+1}{1}\binom{b+c}{b}\binom{c+1}{c}\\
&-\binom{b+1}{2}\binom{b+c}{b+1}\binom{c+1}{c+1}=\frac{(b+c+1)!}{b!\,c!}.
\end{aligned}$$

Доказательство следующего более общего утверждения может быть найдено в [2].

$$\sum_{k=-a}^{a}(-1)^k\binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+a}{c+k}=\frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!} \qquad \text{(Dixon's Identity)}$$

В качестве следствия из этого равенства можно получить утверждение ниже, которое даёт решение задач $2,3$.

Лемма 4.1. *Пусть $n=2m$. Тогда верно следующее равенство:*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^3=(-1)^m\frac{(3m)!}{(m!)^3}$$

Если же $n=2m+1$, то эта сумма равна нулю.

Доказательство. Если n нечётно, то эта сумма равна нулю, так как $C_n^k=C_n^{n-k}$. Если же n чётно ($n=2m$), то достаточно взять $a=b=c=m$ в формуле (Dixon's Identity). □

5 Биномиальная теорема и её следствия

Предложение 5.1 (Биномиальная теорема)**.** *Верно следующее равенство:*

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^ny^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\ldots+\binom{n}{n-1}x^1y^{n-1}+\binom{n}{n}x^0y^n.$$

Это утверждение приводит к следующим соображениям. Рассмотрим функцию трех переменных

$$f(x,y,z) = (x-y)^n(y-z)^n(z-x)^n =$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}y^jz^{n-j}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}z^kx^{n-k}\right).$$

Отсюда можно заметить, что коэффициент $a_{n,n,n}$ функции f равен

$$a_{n,n,n} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^3 \tag{6}$$

Кроме того, коэффициент $a_{n,n,n}$ многочленов

$$g_1(x,y,z) = (x-y)^s(x-y-1)^{n-s}(y-z)^s(y-z-1)^{n-s}(z-x)^s(z-x-1)^{n-s}$$

и

$$g_2(x,y,z) = \prod_{i=0}^{n-1}(x-y-i)(y-z-i)(z-x-i)$$

равен тому же числу, потому что мономы, в число элементов которых входит константа, имеют степень при x, y или z строго меньше n, поэтому не влияют на коэффициент $a_{n,n,n}$. Многочлен $g_1(x,y,z)$ принимает нулевые значения при $x=y$, $y=z$, $z=x$, $x=y+1$, $y=z+1$, или $z=x+1$, а многочлен $g_2(x,y,z)$ принимает нулевые значения при $x-y<n$, $y-z<n$, или $z-x<n$. Поэтому в кубе $[0,3]^3$ многочлен g_1 принимает ненулевые значения во всех точках, кроме объединения плоскостей. Аналогичный вывод можно сделать и про многочлен f. Таким образом, решена задача 4.

6 Загадочное тождество и его обобщение

Другим способом посчитаем коэффициент $a_{n,n,n}$ многочлена $f(x,y,z) = (x-y)^n(y-z)^n(z-x)^n$. Легко видеть, что $\deg f = 2n+2n+2n$. Из леммы 3.4 следует, что для любых множеств $X = \{x_0,\dots,x_{2n}\}$, $Y = \{y_0,\dots,y_{2n}\}$, $Z = \{z_0,\dots,z_{2n}\}$ выполнено:

$$a_{n,n,n} = \sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n}\sum_{k=0}^{2n}(x_i-y_j)^n(y_j-z_k)^n(z_k-x_i)^n\frac{\sigma_n(\hat{x}_i)\cdot\sigma_n(\hat{y}_j)\cdot\sigma_n(\hat{z}_k)}{\phi_1'(x_i)\phi_2'(y_j)\phi_3'(z_k)}.$$

Возьмём $x_k = y_k = z_k = k$, для всех k. Тогда

$$\phi_i'(k) = k(k-1)\dots(2)(1)(-1)(-2)\dots(k-2n+1)(k-2n) = (-1)^{2n-k}k!(2n-k)!$$

Равенство (6) говорит о том, что если n нечётно, то $a_{n,n,n} = 0$. Если n чётно, то

$$a_{n,n,n} = \sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{i+j+k}(i-j)^n(j-k)^n(k-i)^n\frac{\sigma_n(\hat{i})\cdot\sigma_n(\hat{j})\cdot\sigma_n(\hat{k})}{i!j!k!(2n-i)!(2n-j)!(2n-k)!}$$

$$= \frac{3!}{(n!)^3}\sum_{i>j>k}(-1)^{i+j+k}\binom{2n}{i}\binom{2n}{j}\binom{2n}{k}(i-j)^n(j-k)^n(k-i)^n\sigma_n(\hat{i})\cdot\sigma_n(\hat{j})\cdot\sigma_n(\hat{k}),$$

где сумма берется по $i,j,k \in \{0,\dots,2n\}$. Последнее равенство следует из того, что n чётно, то есть каждое слагаемое в сумме не изменяется при перестановке i,j,k между собой.

Таким образом, если n чётно, то

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^3 = \frac{3!}{(n!)^3}\sum_{i>j>k}(-1)^{i+j+k}\binom{2n}{i}\binom{2n}{j}\binom{2n}{k}(i-j)^n(j-k)^n(k-i)^n\sigma_n(\hat{i})\cdot\sigma_n(\hat{j})\cdot\sigma_n(\hat{k}).$$

Теперь рассмотрим следующий многочлен: $g(x,y,z) = (x-y)(y-z)\cdot(z-x)(x-y-1)(y-z-1)(z-x-1)\dots(x-y-n+1)(y-z-n+1)(z-x-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1}(x-y-i)(y-z-i)(z-x-i)$, степени $\deg g = 2n+2n+2n$. Из леммы 3.4 следует, что для любых множеств $X = \{x_0,\dots,x_{2n}\}$, $Y = \{y_0,\dots,y_{2n}\}$, $Z = \{z_0,\dots,z_{2n}\}$ выполнено:

$$a_{n,n,n} = \sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n}\sum_{k=0}^{2n}\frac{\sigma_n(\hat{x_i})\cdot\sigma_n(\hat{y_j})\cdot\sigma_n(\hat{z_k})}{\phi_1'(x_i)\phi_2'(y_j)\phi_3'(z_k)}\prod_{q=0}^{n-1}(x_i-y_j-q)(y_j-z_k-q)(z_k-x_i-q).$$

Возьмём $x_i = y_i = z_i = i-n$, для всех i. Тогда

$$\phi_i'(k) = (k+n)(k+n-1)\dots(2)(1)(-1)(-2)\dots(k-n+1)(k-n) = (-1)^{n-k}(n+k)!(n-k)!$$

Легко видеть, что коэффициент $a_{n,n,n}$ многочлена $g(x,y,z)$ совпадает с коэффициентом $a_{n,n,n}$ многочлена $f(x,y,z)$. Равенство (6) говорит о том, что если n нечётно, то $a_{n,n,n} = 0$. Если же n чётно, то

$$a_{n,n,n} = \sum_{i=-n}^{n} \sum_{j=-n}^{n} \sum_{k=-n}^{n} (-1)^{i+j+k} \frac{\sigma_n(\hat{i}) \cdot \sigma_n(\hat{j}) \cdot \sigma_n(\hat{k})}{(n+i)!(n+j)!(n+k)!(n-i)!(n-j)!(n-k)!} \prod_{q=0}^{n-1} (i-j-q)(j-k-q)(k-i-q)$$

$$= \sum_{\substack{i-j>n \\ j-k>n \\ k-i>n}} (-1)^{i+j+k} \frac{\sigma_n(\hat{i}) \cdot \sigma_n(\hat{j}) \cdot \sigma_n(\hat{k})}{(n+i)!(n+j)!(n+k)!(n-i)!(n-j)!(n-k)!} \prod_{q=0}^{n-1} (i-j-q)(j-k-q)(k-i-q).$$

Таким образом, если n чётно, то

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)^3 = \sum_{\substack{i-j>n \\ j-k>n \\ k-i>n}} (-1)^{i+j+k} \frac{\sigma_n(\hat{i}) \cdot \sigma_n(\hat{j}) \cdot \sigma_n(\hat{k})}{(n+i)!(n+j)!(n+k)!(n-i)!(n-j)!(n-k)!} \prod_{q=0}^{n-1} (i-j-q)(j-k-q)(k-i-q).$$

Какое из тождеств выше можно считать самым загадочным, остаётся на усмотрение читателя. Для развития предыдущей идеи рассмотрим следующий многочлен от s переменных:

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \prod_{i=1}^{s} (x_i - x_{i+1})^n$$

суммарной степени $\deg f = 2sn$. Аналогично предыдущим рассуждениям, коэффициент $a_{n,\ldots,n}$ при мономе $x_1^n \ldots x_s^n$ равен

$$a_{n,\ldots,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)^s,$$

если s нечётно, и

$$a_{n,\ldots,n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)^s,$$

если s чётно. Таким образом,

$$a_{n,\ldots,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{ks} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)^s. \tag{7}$$

Из следствия 3.6 следует, что для любых множеств $X_i = \{x_{i,0}, \dots, x_{i,2n}\}$, выполнено:

$$a_{n,\dots,n} = \sum_{i_1,\dots,i_s=0}^{2n} \frac{\prod_{j=1}^{s} (x_{j,i_j} - x_{j+1,i_{j+1}})^n}{\prod_{t=1}^{s} \phi_t'(x_{t,i_t})} \prod_{p=1}^{n} \sigma_n(\hat{x}_p).$$

Возьмём $x_{i,k} = x_{j,k} = k$, для всех k, i, j. Тогда $\phi_t'(k) = (-1)^{2n-k} k!(2n-k)!$ Равенство (7) говорит о том, что если n нечётно, то $a_{n,\dots,n} = 0$. Если n чётно, то

$$a_{n,\dots,n} = \sum_{i_1,\dots,i_s=0}^{n} (-1)^{\Sigma i_j} \frac{\prod_{j=1}^{s} (i_j - i_{j+1})^n}{\prod_{t=1}^{s} i_t!(2n-i_t)!} \prod_{p=1}^{n} \sigma_n(\hat{x}_p)$$

$$= \frac{s!}{(n!)^s} \sum_{i_j > i_{j+1}} (-1)^{\Sigma i_j} \prod_{t=1}^{s} \left(\begin{array}{c} 2n \\ i_t \end{array} \right) (i_t - i_{t+1})^n \prod_{p=1}^{n} \sigma_n(\hat{x}_p),$$

где сумма берется по $i_j \in \{0, \dots, n\}$. Последнее равенство следует из того, что n чётно, то есть каждое слагаемое в сумме не изменяется при перестановке i_j и i_k между собой.

Таким образом, мы получаем обобщение загадочного тождества. Если n чётно, то

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{sk} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)^s = \frac{s!}{(n!)^s} \sum_{i_j > i_{j+1}} (-1)^{\Sigma i_j} \prod_{t=1}^{s} \left(\begin{array}{c} 2n \\ i_t \end{array} \right) (i_t - i_{t+1})^n \prod_{p=1}^{n} \sigma_n(\hat{x}_p) \qquad (8)$$

Аналогично можно рассмотреть многочлен

$$g(x, y, z) = \prod_{i=0}^{n-1} \prod_{t=1}^{s} (x_t - x_{t+1} - i),$$

коэффициент $a_{n,\dots,n}$ которого равен коэффициенту $a_{n,\dots,n}$ многочлена f.

7 Заключение

Основными результатами этой работы можно считать обобщение утверждения "Многочлен одной переменной степени d имеет не более чем d

корней" на случай многочлена от n переменных (лемма 2.4), нахождение интерполяционной формулы для многочлена от n переменных (теорема 2.5), которая обобщает интерполяционную формулу Лагранжа (теорема 2.1), нахождение явной формулы выражения произвольного коэффициента многочлена от n переменных через его значение в заданных точках (теорема 3.4), и нахождение нескольких интересных представлений знакопеременной суммы биномиальных коэффициентов степени s (тождество 8). Автор исследования благодарит составителя за формулировку столь интересной задачи.

Список литературы

[1] Э. Винберг, Курс алгебры, Москва, издательство МЦНМО, 2013.

[2] Victor J.W. Guo, A Simple Proof of Dixon's Identity, Nankai University.