Лаборатория Непрерывного Математического Образования
IV Петербургский турнир юных математиков
Санкт-Петербург, 21 – 26 марта 2016 года

Задача 12
Выпуклые функции

Алексеев Илья Сергеевич, команда ЛНМО

Аннотация

В этой статье решены пункты 1, 2, 3, 4 исходной постановки задачи. Сформулирована и доказана лемма о хорде для выпуклых функций нескольких переменных. Показано, что выпуклая функция локально удовлетворяет условию Липшица. Кроме того, показано, что из локального условия Липшица по каждой координате следует локальное условие Липшица в обычном смысле.

1 Постановка задачи.

Напомним, что функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется выпуклой, если

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ \alpha \in [0,1] \quad f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Это эквивалентно тому, что надграфик

$$\mathrm{epi} f = \{(x,\mu) \mid x \in \mathbb{R}^d,\ \mu \in \mathbb{R},\ \mu \ge f(x)\}$$

является выпуклым множеством. Кроме того, выпуклость функции f эквивалентна выполнению неравенства Йенсена

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i), \tag{1.1}$$

для любых $x_i \in \mathbb{R}^d$ и $\lambda_i > 0$ таких, что $\sum \lambda_i = 1$.

Целью этой статьи является исследование следующих вопросов:

1. Хорошо известно, что выпуклая функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ непрерывна. Покажите, что это выполнено и в случае большей размерности.

2. Теперь рассмотрим ситуацию похитрее. Пусть $d = 2$ и $f(x_1, x_2)$ выпукла по каждой координате в отдельности, то есть при фиксированном x_1 она выпукла, как функция от x_2 и наоборот. Покажите, что f непрерывна.

3. Покажите то же самое для $d > 2$.

4. Пусть f выпукла и положительно однородна порядка 1, т.е.

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad f(\lambda x) = |\lambda| f(x).$$

Покажите, что такая функция неотрицательна.

5. Пусть f выпукла по каждой координате и положительно однородна порядка 1, т.е.

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad f(\lambda x) = |\lambda| f(x).$$

Покажите, что такая функция неотрицательна.

6. Функция f называется липшицевой (удовлетворяет условию Липшица) на $\mathbb{R}^d$, если существует такое $L > 0$, что

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d \qquad |f(x) - f(y)| < L|x - y|.$$

   Функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется субгармонической, если для любой точки x_0 и шарика Q с центром в x_0 выполнено неравенство

$$f(x_0) \le \frac{1}{\mathrm{Vol}(Q)} \int\limits_Q f(x)dx,$$

   то есть $f(x_0)$ не превосходит среднего значения по границе произвольного шара Q с центром в x_0.

   Пусть функция $f : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ липшицева на $\mathbb{R}^{2d}$, положительно однородна порядка 1, и для каждого $j \in \{1, \dots, d\}$ субгармонична по переменным (x_j, x_{d+j}). Докажите, что функция f неотрицательна, если

   (a) d равно единице.

   (b) d — произвольное натуральное число.

7. Постройте контрпример для случая нечётной размерности. Например, в $\mathbb{R}^3$.

2 Основные определения.

- Пусть $x, y \in \mathbb{R}^d$. Прямой, проходящей через x и y, назовём множество

$$\langle x, y \rangle = \{\alpha y + (1 - \alpha)x \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

  К примеру, при $\alpha = 0$ получаем точку x, а при $\alpha = 1$ — точку y.

- Пусть $z_1, z_2 \in \langle x, y \rangle$. Тогда $z_1 = \alpha_1 y + (1 - \alpha_1)x$ и $z_2 = \alpha_2 y + (1 - \alpha_2)x$. Будем писать $z_1 < z_2$, если $\alpha_1 < \alpha_2$. К примеру, в $\langle x, y \rangle$ выполнено неравенство $x < y$. Таким образом, будем различать прямые $\langle x, y \rangle$ и $\langle y, x \rangle$ в смысле определения отношения порядка.

- Для любого $x = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{R}^d$ определим норму (длину вектора x) по формуле

$$|x| = \left(\sum_{k=1}^{d} p_k^2 \right)^{1/2}$$

Для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$ определим расстояние между x и y следующим образом

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} (p_k - q_k)^2},$$

где $x = (p_1, \ldots, p_d)$ и $y = (q_1, \ldots, q_d)$.

- Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^d$ и $\delta \in \mathbb{R}^+$. Тогда δ–окрестностью x_0 назовём множество

$$O_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - x_0| < \delta\}.$$

- Выпуклой линейной комбинацией элементов $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ назовём линейную комбинацию вида $\sum \lambda_i x_i$, где $\lambda_i \geq 0$ и $\sum \lambda_i = 1$.

- Выпуклой оболочкой множества $X \subseteq \mathbb{R}^d$ назовём множество $\operatorname{Conv} X$ всевозможных выпуклых линейных комбинаций элементов из X. Оно является наименьшим выпуклым множеством, содержащим X. Подробнее см. [1], стр. 290.

- Будем говорить, что функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ локально удовлетворяет условию Липшица, если любая точка $x \in \mathbb{R}^d$ обладает окрестностью $O_\delta(x)$ такой, что для любой точки $y \in O_\delta(x)$ выполняется условие Липшица для x, y.

3 Выпуклые функции.

Мы не используем эту лемму в дальнейшем, но она является интересной сама по себе.

Лемма 3.1. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ выпукла, $x, y \in \mathbb{R}^d$. Если $x_1, x_2, x_3 \in \langle x, y \rangle$ таковы, что $x_1 < x_2 < x_3$, то*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{|x_2 - x_1|} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{|x_3 - x_1|}$$

и

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{|x_2 - x_1|} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{|x_3 - x_2|}$$

Доказательство. Пусть $x_i = \alpha_i x + (1-\alpha_i)y$. Читатель легко проверит выполнение равенства $|x_i - x_j| = (\alpha_i - \alpha_j)|y-x|,\ i > j$.

Для $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in \langle x, y\rangle$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \varphi(\lambda) := f(z),$$

которая, очевидно, является выпуклой.

Возьмём $\lambda = \frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_3-\alpha_1} < 1$. Легко проверить, что $\lambda\alpha_3 + (1-\lambda)\alpha_1 = \alpha_2$. Тогда

$$\varphi(\alpha_2) = \varphi(\lambda\alpha_3 + (1-\lambda)\alpha_1) \overset{(1.1)}{\le} \lambda\varphi(\alpha_3) + (1-\lambda)\varphi(\alpha_1)$$

$$= \frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_3-\alpha_1}\varphi(\alpha_3) + \varphi(\alpha_1) - \frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_3-\alpha_1}\varphi(\alpha_1),$$

что эквивалентно

$$\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1) \le \frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_3-\alpha_1}\left(\varphi(\alpha_3) - \varphi(\alpha_1)\right),$$

то есть

$$\frac{\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1)}{\alpha_2-\alpha_1} \le \frac{\varphi(\alpha_3) - \varphi(\alpha_1)}{\alpha_3-\alpha_1}.$$

Из определения функции φ получаем

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{|x_2-x_1|} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{|x_3-x_1|},$$

что и требовалось доказать.

Второе равенство доказывается аналогично. □

Предложение 3.2. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ выпукла, $x \in \mathbb{R}^d$ и $\delta \in \mathbb{R}^+$. Тогда f ограничена сверху на δ–окрестности x.*

Доказательство. Более общее утверждение можно сформулировать следующим образом. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, где $x_i \in \mathbb{R}^d$, — конечное множество такое, что $O_\delta(x) \subseteq \operatorname{Conv} X$. Другими словами, $\operatorname{Conv} X$ — выпуклый многогранник, содержащий δ–окрестность x. Покажем, что максимум функции f на $\operatorname{Conv} X$ достигается в точке $y = \max f(x_i)$, откуда будет следовать требуемое утверждение.

По определению выпуклой оболочки X, для любого $a \in \operatorname{Conv} X$ существуют такие $\lambda_i \geq 0$, что $\sum \lambda_i = 1$ и $a = \sum \lambda_i x_i$. Из выпуклости f получаем

$$f(a) = f\left(\sum \lambda_i x_i\right) \overset{(1.1)}{\leq} \sum \lambda_i f(x_i) \leq \sum \lambda_i y = y.$$

Из полученного неравенства следует, что функция f ограничена сверху на $\operatorname{Conv} X$. В частности, f ограничена сверху на δ–окрестности x.

□

Лемма 3.3. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ выпукла и $x \in \mathbb{R}^d$. Тогда функция f локально удовлетворяет условию Липшица в x.*

Доказательство. Пусть $y \in O_\delta(x)$. Из предыдущей леммы следует, что функция f ограничена на $O_\delta(x)$ константой C. Возьмём $L = \frac{C - f(x)}{\delta}$, $\lambda = |x - y|/\delta$ и $z = x(\lambda - 1)/\lambda + y/\lambda$. Тогда $y = \lambda z + (1 - \lambda)x$. Имеем

$$f(y) - f(x) \overset{(1.1)}{\leq} \lambda f(z) + (1 - \lambda) f(x) - f(x) \overset{(3.2)}{\leq} \lambda(C - f(x)) = \frac{C - f(x)}{\delta} |x - y|.$$

Пусть теперь $w = x(\lambda + 1)/\lambda - y/\lambda$. Тогда $y = x + \lambda(x - w)$. Легко проверить, что

$$f(y) - f(x) \overset{(1.1)}{\geq} \lambda(f(x) - f(w)) \overset{(3.2)}{\geq} \frac{f(x) - C}{\delta} |x - y|.$$

Откуда

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{C - f(x)}{\delta} |x - y| = L\,|x - y|,$$

что и требовалось доказать. □

Следующая теорема даёт решение задачи 1.

Теорема 3.4. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ выпукла, и $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Тогда f непрерывна в x_0.*

Доказательство. По предыдущей лемме функция f локально удовлетворяет условию Липшица в x_0. Значит, $\forall x \in O_\delta(x)$ выполнено

$$|f(x) - f(x_0)| < L\,|x - x_0|,$$

для некоторой константы L. Тогда при $x \to x_0$ выполнено $f(x) \to f(x_0)$, то есть f непрерывна в x_0. □

Следующая теорема даёт решение задачи 4.

Теорема 3.5. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ выпукла и положительно однородна порядка 1. Тогда она неотрицательна.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R}^d$. Так как функция f однородна, то $f(-x) = |-1|f(x) = f(x)$. Тогда из выпуклости f имеем

$$0 = f(0) = f\left(\frac{1}{2}(-x) + \frac{1}{2}x\right) \overset{(1.1)}{\le} \frac{1}{2}f(-x) + \frac{1}{2}f(x) = f(x),$$

что и требовалось доказать. □

4 Выпуклые по каждой координате функции.

Пусть функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ выпукла по каждой координате по отдельности. Предположение о том, что из выпуклости функции по каждой координате следует выпуклось в обычном смысле — неверно. К примеру, функция $f(x,y) = xy$ выпукла при фиксированном x, как функция от y и наоборот, но она не является выпуклой.

Теорема 3.4 показывает, что каждая выпуклая на $\mathbb{R}^d$ функция является непрерывной. Для функций, выпуклых по каждой координате, свойство непрерывности остаётся в силе. Однако, из того, что произвольная функция непрерывна по каждой координате, не следует, что она непрерывна в обычном смысле. К примеру, функция

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

где $f(0,0) := 0$, непрерывна при фиксированном x, как функция от y и наоборот, но она не является непрерывной.

Лемма 4.1. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ выпукла по каждой координате, и $x \in \mathbb{R}^d$. Тогда f локально удовлетворяет условию Липшица в x.*

Доказательство. Не умаляя общности, $x = 0$. Пусть $y \in O_\delta(x)$ и $e_1, \dots, e_d$ — стандартный базис $\mathbb{R}^d$. Из лемммы 3.3 следует, что сужение функции f на подпространства e_i локально удовлетворяет условию Липшица в $O_\delta(x)$ с константой L. Пусть $y = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i$. Обозначим за $v_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_k e_k$. Тогда прямая, проходящая через v_k и v_{k+1} параллельна осям координат. Имеем

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(v_1)| + |f(v_1) - f(v_2)| + \ldots + |f(v_{d-1}) - f(y)| \\
&\leq L\,|x - v_1| + L\,|v_1 - v_2| + \ldots + L\,|v_{d-1} - y| \\
&= L\,|e_1| + L\,|e_2| + \ldots + L\,|e_d| \\
&\leq L\,|x - y| + L\,|x - y| + \ldots + L\,|x - y| \\
&= dL\,|x - y|,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Следующая теорема даёт решение задач 2, 3.

Теорема 4.2. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ выпукла по каждой координате. Тогда она непрерывна на $\mathbb{R}^d$.*

Доказательство. В предыдущей лемме было показано, что из локальной липшевости по каждой координате следует локальная липшевость в обычном смысле. Но так как функция, локально удовлетворяющая условию Липшица, непрерывна (см. 3.4), то f непрерывна. □

5 Заключение

Основными результатами этой работы являются: доказательство того факта, что выпуклая функция нескольких переменных является Липшицевой, и, следовательно, непрерывной на $\mathbb{R}$, доказательство того, что функция, удовлетворяющая условию Липшица по каждой координате, является Липшицевой, доказательство того, что выпуклая по каждой координате функция является непрерывной на $\mathbb{R}$, и доказательство того, что выпуклая и положительно однородная функция является неотрицательной.

Список литературы

[1] Э. Винберг, Курс алгебры, Москва, издательство МЦНМО, 2013.