V ОТКРЫТЫЙ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

27 марта — 1 апреля 2017 года

Задача №1 Уйдём на Север

Снежная Королева возвращается обратно на Север и собирает чемоданы. За то время, что она провела вне дома, она накопила множество льдинок самой разной формы и хочет их все взять с собой. Помогите Снежной Королеве быстрее собрать вещи.

1) У Снежной Королевы есть стеллаж с плоскими квадратными чемоданами и множество льдинок треугольной формы, которыми она дорожит. Какова наименьшая сторона плоского квадратного чемодана, в которую поместятся одновременно две плоские льдинки в форме равнобедренных прямоугольных треугольников с длинами катетов a и b, соответственно? А две льдинки в форме равносторонних треугольников? В плоские чемоданы льдинки укладываются только в один слой.

Рис. 1. Две треугольные льдинки в не самом подходящем плоском квадратном чемодане

2) Настала очередь прозрачных картин изо льда. В какой плоский квадратный чемодан поместятся две ледяные квадратные картины со сторонами a и b, соответственно?

3) Стеллаж с квадратными чемоданами опустел. Но в ящике комода обнаружились чемоданы самых разных форм. Первыми на глаза попалась стопка с несчётным числом плоских прямоугольных чемоданов. Как выглядят прямоугольные чемоданы наименьшей площади, в которые можно поместить льдинки уже рассмотренных форм?

4) Для ускорения сборов удобнее класть более двух льдинок в чемодан. В какой прямоугольный чемодан лучше всего убрать 3 одинаковые равносторонние льдинки? А 4? Что будет в случае льдинок — прямоугольных треугольников?

5) Кубические чемоданы отлично подходят для упаковки объёмных льдинок-тетраэдров. Решите задачу для различных пар таких льдинок.

6) Рассмотрите льдинки и чемоданы других форм. Например, круглые льдинки-тарелки и треугольные чемоданы.

Задача №2 Вас снимают

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ является объединением непересекающихся отрезков на прямой. Обозначим за $L(I)$ длину множества I, то есть сумму длин соответствующих отрезков. Подмножество плоскости A будем называть фигурой, если оно ограничено, замкнуто и его пересечение с любой прямой есть объединение конечного числа отрезков (определения 2 и 3 ниже). В частности, любой многоугольник является фигурой. Зафиксируем некоторую декартову систему координат на плоскости. Для фигуры A определим её x-снимок, как функцию $f_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая по точке t на прямой OX вычисляет длину пересечения A с прямой, проходящей через t и перпендикулярной OX

$$f_x(t) = L(A \cap \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \text{ любое}\}).$$

Аналогично определим y-снимок фигуры A как

$$f_y(t) = L(A \cap \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ любое}\}).$$

1) Какая фигура обладает следующими x- и y-снимками:

$$f_x(t) = f_y(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \frac{7t}{12}, & 0 \le t \le 3 \\ \frac{21}{12}, & 3 \le t \le 4 \\ -\frac{7t}{12} + \frac{49}{12}, & 4 \le t \le 7 \\ 0, & 7 \le t \end{cases} \quad ?$$

2) Найдите способ восстановить фигуру A, а также варианты её расположения по x- и y-снимкам, если известно, что
а) A — некоторый прямоугольник;
б) A — некоторый треугольник;
в) A — некоторый четырёхугольник.
Можно ли обойтись только одним снимком?

3) Приведите пример двух неравных фигур на плоскости, имеющих одинаковые x- и y-снимки.

4) Пусть A некоторая фигура. Можно ли восстановить и, если можно, то как, по x- и y-снимкам следующую информацию:
а) A имеет площадь S;
б) A является невыпуклой фигурой (см. определение 4);
в) A является многоугольником с n вершинами;
г) A содержит фиксированную точку (x_0, y_0)?
Можно ли добиться ответов на эти вопросы, если заранее известна дополнительная информация про A? Например, если известно, что A выпуклая и центрально-симметричная фигура?

5) Повернём исходную систему координат относительно начала отсчёта на угол α против часовой стрелки. x-снимок в новой системе координат назовём α-снимком. Так например, 0-снимок это x-снимок, $\frac{\pi}{2}$-снимок это y-снимок. Исследуйте предыдущие пункты, если вместо x- и y- снимков даны α- и β-снимки, для некоторых неравных углов α и β? Можно ли узнать дополнительную информацию (например, восстановить любую фигуру), если даны три разных снимка?

Задача №3 Целые структуры

1) Пусть даны два целых числа a и b. Множеством, подчинённым a и b назовём S, подмножество в $\mathbb{Z}$, удовлетворяющее свойствам:
а) $a, b \in S$;
б) Для любого $x \in S$ число $-x$ лежит в S;
в) Для всех x и y из S число $ax + by$ также лежит в S.
Пусть $a = 2$, а $b = 3$. Покажите, что любое подчинённое 2 и 3 множество S обязательно содержит 1.

2) Опишите наименьшее множество S, подчинённое a и b, если $a = b = 1$. Что будет, если $a = 2$, $b = 3$?

3) Рассмотрите аналогичную задачу для $a = 4$, $b = 5$.

4) При каком условии на a и b в любом a, b-подчинённом множестве S найдётся число, имеющее остаток k по модулю n для всех $0 \le k < n$.

5) Пусть a и b взаимно просты. Покажите, что любое подчинённое a и b множество содержит 1.

6) Натуральной плотностью множества $A \subseteq \mathbb{Z}$ назовём предел отношения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{x \in A \mid -n \le x \le n\}|}{2n},$$

если этот предел существует. Верно ли, что для не взаимно простых a и b размер наименьшего подчинённого a и b множества имеет натуральную плотность 0?

Задача №4 Буйство красок

Известный художник Петров имеет следующую манеру письма: он разбивает квадратный холст $n \times n$ на квадратики 1×1, после чего каждый квадратик закрашивает в один из k цветов, имеющихся в наличии. Так как на картине не указан верх и низ, то искусствоведы и сам Петров считают две картины, отличающиеся поворотом на $90°$, одинаковыми.

1) В детстве Петров писал на холсте 2×2. Известно, что за это время он написал более 100, но менее 200 различных картин, при этом с холстов 2×2 на большие он перешёл после того, как написал картины размера 2×2 всеми доступными ему способами. Сколько красок было у Петрова в детстве? Сколько в точности картин 2×2 он написал?

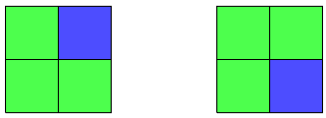

Рис. 2. Две неразличимые детские картины Петрова 2×2 на двух цветах

2) Обретя популярность, Петров переключился на масштабные проекты с холстами $n \times n$, $n \ge 3$ и числом красок k. Найдите асимптотику или формулу для числа различных картин, которые мог написать Петров на полотнах 3×3, 4×4, при $k \to \infty$. Оцените число возможных картин Петрова при других n или дайте точную формулу.

3) Для систематизации картин Петрова искусствоведы предложили несколько классификаций, основанных на том, что две картины Петрова не стоит различать, если они отличаются цепочкой определённых преобразований. Найдите конкретные значения, оцените при больших n и k или дайте точную формулу числа работ Петрова по классификациям, основанным на преобразованиях:
а) Поворот на $90°$ и отражения относительно осей симметрии квадрата;
б) Преобразования из пункта а) и преобразование, сдвигающее все строчки квадрата, кроме первой, на 1 вниз, а нижнюю строчку ставящее наверх.
в) Преобразования из пункта а) и преобразования, меняющие цвета на картине: цвет i на цвет j, цвет j на цвет i, и не меняющее остальные цвета. Назовём такие преобразования элементарными перекрашиваниями (см. рис. 3).
г) Преобразования из пункта а) и преобразования, позволяющие в одном из столбцов сдвинуть все квадратики на 1 по циклу.

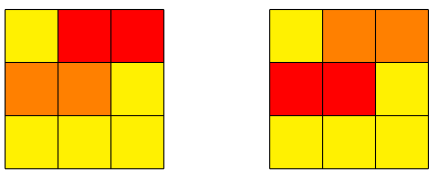

Рис. 3. Картины, отличающиеся заменой оранжевого и красного цветов

4) Художник Иванов решил превзойти Петрова и стал разбивать равносторонний треугольник со стороной n на треугольники со стороной 1 и раскрашивать их в k цветов. Исследуйте аналогичный предыдущим пунктам вопрос. В частности, рассмотрите классификации, разрешающие преобразования:
а) Поворот на $120°$;
б) Поворот на $120°$ и отражения относительно осей симметрии треугольника;
в) Преобразования из пункта б) и элементарные перекрашивания;
г) Преобразования из пункта а) и преобразование, сдвигающее по циклу цвета в одном горизонтальном ряду большого треугольника.

5) Рассмотрите другие, в том числе трёхмерные, разбиения и их раскраски. Придумайте другие классификации.

Задача №5 Дискретная непрерывность

Будем говорить, что два целых числа a и b соседние, если $|a-b| \leq 1$. Пусть I — некоторое подмножество внутри целых чисел. Отображение $f : I \to \mathbb{Z}$ назовём дискретно непрерывным, если для любых двух соседних чисел $a, b \in I$ их образы $f(a)$ и $f(b)$ тоже соседние.

1) Пусть $a < b$ — два целых числа. Целочисленным отрезком $[a, b]$ будем называть подмножество целых чисел $[a, b] = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \leq b\}$. Пусть дано дискретно-непрерывное отображение $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Покажите, что для любого целого числа $x \in [f(a), f(b)]$ существует c, такое, что $a \leq c \leq b$ и $f(c) = x$.

2) Пусть $n \in \mathbb{N}$ — некоторое натуральное число. Рассмотрим функцию $\rho_1(x, y)\colon \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$, заданную по правилу
$$\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \text{ где } x = (x_1, \ldots, x_n), \text{ а } y = (y_1, \ldots, y_n).$$
Будем говорить, что точки x, $y \in \mathbb{Z}^n$ соседние, если $\rho_1(a, b) \leq 1$. Пусть A — подмножество в $\mathbb{Z}^n$, а $k \in \mathbb{N}$. Отображение $f\colon A \to \mathbb{Z}^k$ назовём дискретно-непрерывным, если для любых соседних x, $y \in A$ их образы $f(x)$ и $f(y)$ соседние в $\mathbb{Z}^k$. Для каждого натурального числа m определим множества
$$D^n_m = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid |x_i| \leq m\} \quad \text{и} \quad S^{n-1}_m = \{x \in D^n_m \mid \exists i \leq n\ |x_i| = m\}.$$
Пусть дискретно-непрерывное отображение $f\colon S^1_m \to \mathbb{Z}^2$, а $x \in \mathbb{Z}^2$ не лежит в $f(S^1_m)$. Для любого луча l, исходящего из точки x и не содержащего точек $f(S^1_m)$, можно определить число $i_{l,f}$ его пересечений с ломаной, построенной по f. Сделаем это следующим образом:
$$i_{l,f} = \frac{1}{2}\Big|\{(a, b) \mid a,\ b \in S^1_m,\ \rho_1(a, b) = 1 \text{ и } l \text{ пересекает отрезок, соединяющий } f(a) \text{ и } f(b)\}\Big|.$$
Число $\frac{1}{2}$ появляется из-за того, что одно и тоже пересечение соответствует и паре (a, b), и паре (b, a). Покажите, что чётность $i_{l,f}$ не зависит от выбора l и, следовательно, является характеристикой точки x.

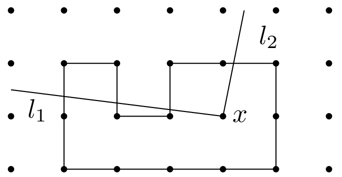

Рис. 4. Ломаная и два луча, исходящие из одной точки, с $i_{l_1,f} = 3$ и $i_{l_2,f} = 1$

3) Точку $x \in \mathbb{Z}^2$, не лежащую в $f(S^1_m)$, назовём внутренней по отношению к f, если $i_{l,f}$ нечётно, и внешней, если $i_{l,f}$ чётно. Пусть дано дискретно-непрерывное отображение $g\colon D^2_m \to \mathbb{Z}^2$. Положим $f = g|_{S^1_m}$ — сужение отображения g. Покажите, что для любой f-внутренней точки x существует $y \in D^2_k$, что $g(y) = x$.

4) Определим метрические пространства (см. метрика) $\mathbb{Z}^{n,p}$, где $p = \infty$, или $p \geq 1$ — вещественное число, следующим образом:

$$\mathbb{Z}^{n,\infty} = (\mathbb{Z}^n, \max\{|x_i - y_i| : i \in \overline{1,n}\}) \text{ и при } p \text{ вещественном } \mathbb{Z}^{n,p} = (\mathbb{Z}^n, \rho_p),$$

где $\rho_p(x,y) = (\sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|^p)^{1/p}$. Заметим, что если $n = 1$, то все метрики ρ_p совпадают, поэтому при $n = 1$ индекс p можно опустить. Естественным образом, расстояние ограничивается и на подмножества указанных метрических пространств. Определение понятия L-липшицевого отображения можно найти в конце (см. определение 6).

а) Покажите, что 1-липшицевы отображения из $\mathbb{Z}^{n,1} \to \mathbb{Z}^{k,1}$ являются дискретно-непрерывными и наоборот.

б) Опишите все пары чисел L_1 и L_2, такие что отображение $f\colon \mathbb{Z}^{2,p} \to \mathbb{Z}^{2,p}$ липшицево с константой L_1 тогда и только тогда, когда оно L_2-липшицево.

в) Исследуйте взаимосвязь между условиями липшицевости для отображений $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ в метриках ρ_p и ρ_q с различными константами L.

5) Пусть L — натуральное число. Покажите, что для любого L-липшицевого отображения $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ и любого целочисленного отрезка $[a,b]$

$$\frac{|f([a,b])|}{|\operatorname{conv}(f([a,b]))|} \geq \frac{1}{L},$$

где $|f([a,b])|$ — это количество точек в образе $[a,b]$, а $\operatorname{conv}(f([a,b]))$ — наименьший отрезок, содержащий $f([a,b])$.

6) Зададим расстояние на D_m^n с помощью метрики ρ_1. Сформулируйте и докажите аналог пункта 6 задачи для L-липшицевых отображений из $D_m^2 \to \mathbb{Z}^{2,q}$.

7) Обобщите все указанные теоремы на случай размерности больше 2. Опишите все L-липшицевы биекции из $\mathbb{Z}^{n,p} \to \mathbb{Z}^{n,q}$ для маленьких L.

Задача №6 Гипергеометрическая прогрессия

1) Рассмотрим следующее рекуррентное соотношение:

$$p(n)a_n = q(n)a_{n-1}, \text{ для } n > n_0 \text{ и } a_{n_0} = \lambda,$$

где λ — некоторое вещественное число, а $p(n)$ и $q(n)$ — некоторые многочлены с вещественными коэффициентами. Выведите явную формулу для его решения.

2) Последовательность из предыдущего пункта назовём гипергеометрической прогрессией. Будем говорить, что многочлены p и q определяют эту прогрессию. Являются или нет частными случаями гипергеометрической прогрессии: а) геометрическая прогрессия; б) арифметическая прогрессия; в) $a_n = n!$; г) $a_n = C_n^k$ для фиксированного k; д) $a_n = \frac{(-1)^n+1}{2}$? Если да, то какие многочлены их задают?

3) Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$p(n)a_n = q(n)a_{n-1} + r(n)a_{n-2},$$

где $p(n)$, $q(n)$, $r(n)$ — некоторые многочлены. При каких p, q и r у такого рекуррентного соотношения нет решений в виде гипергеометрической прогрессии?

4) Исследуйте предыдущий вопрос для соотношения

$$p_0(n)a_n = p_1(n)a_{n-1} + p_2(n)a_{n-2} + \cdots + p_k(n)a_{n-k},$$

где k фиксировано, $p_i(n)$ — некоторые многочлены.

5) Пусть даны две гипергеометрические прогрессии a_n и b_n. При каких условиях на многочлены, задающие a_n и b_n, существуют числа $r_1(n)$ и $r_2(n)$, что $r_1(n)a_n + r_2(n)b_n = 0$ для всех n?

6) Исследуйте предыдущий вопрос для большего числа гипергеометрических прогрессий.

7) Пусть a_n и b_n — две последовательности. Определим последовательность $a * b_n$ равенством

$$a * b_n = \sum_{0 \le i \le n} a_i b_{n-i}.$$

Предположим, что a_n и b_n — гипергеометрические прогрессии. Всегда ли последовательность $a * b_n$ есть конечная сумма гипергеометрических прогрессий? Если нет, то какие условия надо наложить на a_n и b_n, чтобы это было верно? Начните со случая геометрических прогрессий.

8) Исследуйте существование решений в виде гипергеометрических функций для рекуррентного соотношения

$$p(0,n)a_n = p(1,n)a_{n-1} + \dots + p(k, n-k)a_{n-k} + \dots + p(n_0, n-n_0)a_{n_0},$$

где $p(n,k)$ — гипергеометрическая функция по n и по k.

Задача №7 Зависимые матрицы

1) Пусть B, C и D матрицы 2×2 с коэффициентами из $\mathbb{R}$ (см. определение 8 ниже). Линейным уравнением в матрицах относительно матрицы X назовём уравнение вида:

$$CXD = B.$$

Матрица $A \in M_2(\mathbb{R})$ называется его решением, если

$$C \cdot A \cdot D = B,$$

где $\cdot$ обозначает произведение матриц (см. определение 9). Обозначение произведения для краткости будем опускать. Решите уравнение:

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{smallmatrix}\right).$$

2) Покажите, что уравнение $CXD = B$ разрешимо тогда и только тогда, когда разрешимы уравнения $CX = B$ и $XD = B$. При каких условиях на C и D уравнение $CXD = B$ разрешимо при любых B?

3) Естественным образом, можно определить обобщённые линейные уравнения:

$$C_1XD_1 + C_2XD_2 + \dots + C_nXD_n = B.$$

Исследуйте разрешимость таких уравнение для любых B и решите обобщённое линейное уравнение:

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) X \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{smallmatrix}\right).$$

4) Последовательность матриц вида $A_n = C^n A_0$ назовём геометрической прогрессией. Опишите все решения линейного рекуррентного соотношения $A_{n+1} = CA_nD$, являющиеся геометрическими прогрессиями. Можно ли любое решение такого рекуррентного соотношения представить в виде суммы геометрических прогрессий? В частности, ответьте на указанные вопросы для соотношения

$$A_{n+1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) A_n \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

5) Исследуйте аналогичный вопрос для рекуррентных соотношений вида $A_{n+1} = CA_n + A_nD$.

6) Рассмотрите рекуррентное соотношение $A_{n+1} = C_1A_nD_1 + C_2A_nD_2$. Исследуйте существование у этого рекуррентного соотношения решения в виде геометрической прогрессии. В частности, опишите все решения, являющиеся геометрическими прогрессиями для соотношения

$$A_{n+1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) A_n \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) A_n \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

7) Исследуйте выразимость в геометрических прогрессиях решений линейных рекуррентных соотношений вида

$$A_{n+1} = C_1A_nD_1 + C_2A_{n-1}D_2,$$

а также линейных рекуррентных соотношений большего порядка.

Задача №8 Можно ли разрезать?

1) Пусть φ — некоторый угол. Покажите, что
$$\cos n\varphi = p(\cos\varphi),$$
где $p(x)$ — это многочлен степени n с целыми коэффициентами.

2) Покажите, что угол между гипотенузой и катетом в прямоугольном треугольнике со сторонами 3, 4, 5 не равен:
а) $\frac{k\pi}{5}$, где k — целое; б) $\frac{k\pi}{l}$, где k и l — целые неотрицательные числа.

3) Можно ли так изобразить равносторонний треугольник на координатной плоскости, чтобы координаты вершин являлись рациональными числами?

4) Опишите все треугольники с рациональными координатами вершин и углами вида $\frac{k\pi}{l}$, где k и l — целые неотрицательные числа. Такие углы в дальнейшем будем называть рациональными.

5) Разрезанием многоугольника P назовём такой набор многоугольников P_i, где $1 \le i \le n$ внутри P, что $P = \bigcup_{1\le i\le n} P_i$ и при $i \ne j$ многоугольники P_i и P_j могут пересекаться лишь по точкам на границе. Пусть дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами a и b. Опишите все a и b, при которых его можно разрезать на три треугольника с рациональными углами. Приведите примеры разрезаемых и неразрезаемых прямоугольников.

6) Найдите критерий, при котором многоугольник может быть разрезан каким-либо образом на треугольники с рациональными углами.

7) Два многоугольника P и Q с рациональными углами, назовём рационально равносоставленными, если существует разрезание $\{P_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ для P и разрезание $\{Q_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ для Q, такие что фигуры P_i и Q_i равны и имеют рациональные углы для всех i. Например,

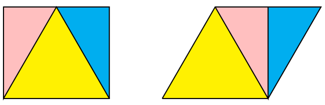

Рис. 5. Разрезание на попарно равные треугольники с рациональными углами.

Найдите необходимые и достаточные условия рациональной равносоставленности двух фигур. Приведите примеры рационально равносоставленных и не рационально равносоставленных многоугольников.

Задача №9 Порядки

Пусть M_1 и M_2 — два упорядоченных множества (см. определение 10). Отображение $f\colon M_1 \to M_2$ называется монотонным, если для любых x и y из M_1, таких, что $x \le y$, выполнено, что $f(x) \le f(y)$ относительно порядка на M_2. Монотонное отображение $f\colon M_1 \to M_2$ называется изоморфизмом, если f биективно и обратное отображение $f^{-1}\colon M_2 \to M_1$ также монотонно.

1) Пусть $f\colon M \to N$ — изоморфизм двух упорядоченных множеств. Покажите, что для любого $x \in M$ множество $M_{\le x} = \{y \in M \mid y \le x\}$ изоморфно $N_{\le f(x)} = \{y \in N \mid y \le f(x)\}$.

2) Опишите все изоморфизмы из $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, где $\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X, упорядоченных по отношению включения $\subseteq$.

3) Пусть M_1 и M_2 — два упорядоченных множества. Тогда введём на $M_1 \times M_2$ порядок следующим образом:
$$(x_1, y_1) \le_{nat} (x_2, y_2) \text{ тогда и только тогда, когда } x_1 \le x_2 \text{ и } y_1 \le y_2.$$

Обозначим получившееся упорядоченное множество как $M_1 \times_{nat} M_2$. Будем называть такой порядок естественным. Введём на $M_1 \times M_2$ другой порядок:

$$(x_1, y_1) \leq_{lex} (x_2, y_2) \text{ тогда и только тогда, когда } x_1 < x_2 \text{ или когда } x_1 = x_2 \text{ и } y_1 \leq y_2.$$

Обозначим это упорядоченное множество как $M_1 \times_{lex} M_2$.

Покажите, что следующие упорядоченные множества не изоморфны между собой: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times_{nat} \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times_{lex} \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

4) Изоморфны или нет следующие множества: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \times_{lex} \mathbb{R}$, $\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \times_{lex} \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{R}$?

5) Какие из следующих множеств изоморфны: $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Z}) \times_{nat} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times_{lex} (\mathbb{Z} \times_{nat} \mathbb{Z})$, $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{N}) \times_{nat} \mathbb{Z}$?

6) Рассмотрите предыдущий вопрос, когда сомножителей больше чем три, "скобки" можно расставлять произвольным образом и на произведениях можно ввести операцию одним из двух описанных выше способов.

7) Опишите все изоморфизмы между найденными парами изоморфных упорядоченных множеств.

Задача №10 Лучше меньше, да лучше

Пусть a_n — некоторая последовательность вещественных чисел, такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Определим $S(\{a_n\})$ как множество всех подсумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а именно:

$$S(\{a_n\}) = \big\{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists \Gamma \subseteq \mathbb{N}, \text{ что } x = \sum_{k \in \Gamma} a_k \big\}.$$

1) Пусть $a_n = \frac{1}{2^n}$. Найдите $S(\{a_n\})$.

2) Будем говорить, что множество $A \subseteq \mathbb{R}$ имеет меру 0, если $\forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счётный набор интервалов (x_k, y_k), таких что
$$A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (x_k, y_k) \text{ и } \sum_{k \in \mathbb{N}} |y_k - x_k| < \varepsilon.$$
Рассмотрим последовательность $a_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$. Покажите, что $S(\{a_n\})$ имеет меру 0.

3) Покажите, что $S(\{\frac{1}{n^2}\})$ содержит внутри себя некоторый отрезок ненулевой длины.

4) Мерой замкнутого множества A на прямой назовём
$$\mu(A) = \inf \big\{t \in \mathbb{R} \,|\, \text{существует набор интервалов } (x_k, y_k), \text{ что } A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (x_k, y_k) \text{ и } \sum_{k \in \mathbb{N}} |y_k - x_k| = t \big\}.$$
Приведите пример последовательности a_n, что $S(\{a_n\})$ не содержит отрезка, но является множеством ненулевой меры. Что можно сказать про меру $S(\{a_n\})$, где a_n — геометрическая прогрессия?

5) Рассмотрим множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел x_n сходится к некоторому числу x, если последовательности из вещественных и мнимых частей $\operatorname{Re} x_n$ и $\operatorname{Im} x_n$ сходятся к $\operatorname{Re} x$ и $\operatorname{Im} x$, соответственно. Таким образом, возникает возможность по последовательности комплексных чисел a_n определить
$$S(\{a_n\}) = \big\{x \in \mathbb{C} \,|\, \exists \Gamma \subseteq \mathbb{N}, \text{ что } x = \sum_{k \in \Gamma} a_k \big\},$$
где под суммой ряда подразумевается предел последовательности
$$x_n = \sum_{\substack{k \in \Gamma \\ k \leq n}} a_k.$$
Опишите $S(\{\left(\frac{1}{2i}\right)^n\})$. Найдите последовательность a_n, что $S(\{a_n\})$ — круг радиуса 1 на плоскости.

6) Дайте определение меры замкнутого множества на плоскости и приведите пример последовательности a_n, что $S(\{a_n\})$ является множеством ненулевой меры и не содержит ни одного круга.

7) Рассмотрите последовательности в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, отличные от геометрической прогрессии. Предложите способ узнать $\mu(S(\{a_n\}))$. Насколько произвольным может быть множество вида $S(\{a_n\})$?

Определения

Определение 1 (Замкнутый шар и открытый шар в $\mathbb{R}^n$)**.** Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, и $r > 0$. Множество $\overline{B_r(x)} = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \le r\}$ назовём замкнутым шаром радиуса r с центром в точке x, а $B_r(x) = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} < r\}$ — открытым.

Определение 2 (Замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$)**.** $A \subseteq \mathbb{R}^n$ называется замкнутым, если для любой точки $x \notin A$ существует $r > 0$, что открытый шар радиуса r с центром в точке x не пересекается с A.

Определение 3 (Ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$)**.** $A \subseteq \mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если существует $r > 0$, что A содержится в замкнутом шаре радиуса r с центром в некоторой точке из $\mathbb{R}^n$.

Определение 4 (Выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$)**.** $A \subseteq \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если для любых двух точек $a, b \in A$ отрезок $[a, b] = \{ta + (1-t)b \mid 0 \le t \le 1\}$ целиком лежит в A.

Определение 5 (Метрика)**.** Пусть M — некоторое множество. Метрикой или расстоянием на M называется отображение $\rho\colon M \times M \to \mathbb{R}$, что

- $\forall x, y \in M$ выполнено $\rho(x, y) \ge 0$ и $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
- $\forall x, y \in M$ верно $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- $\forall x, y, z \in M$ имеет место неравенство треугольника $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Пара из (M, ρ), где ρ — метрика на M, называется метрическим пространством.

Определение 6 (Липшицево отображение)**.** Пусть заданы два метрических пространства (M_1, ρ) и (M_2, ρ'). Отображение $f\colon M_1 \to M_2$ называется липшицевым с константой $L > 0$, если

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \text{ выполнено } \rho'(f(x), f(y)) \le L\rho(x, y).$$

Для краткости, липшицевы отображения с константой L будем называть L-липшицевыми.

Определение 7 (Кольцо)**.** Ассоциативным кольцом с единицей называется множество R вместе со введёнными на нём операциями сложения $+\colon R \times R \to R$ и умножения $\cdot\colon R \times R \to R$, удовлетворяющими следующим свойствам:
1) $\forall a, b, c \in R$ справедливо, что $(a + b) + c = a + (b + c)$;
2) $\forall a, b \in R$ выполнено $a + b = b + a$;
3) $\exists 0 \in R$, что $\forall a \in R$ верно $a + 0 = 0 + a = a$;
4) $\forall a \in R$ существует $-a \in R$, что $a + (-a) = (-a) + a = 0$;
5) $\forall a, b, c \in R$ верно $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
6) $\forall a, b, c \in R$ верно $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$;
7) $\exists 1 \in R$, что $\forall a \in R$ верно $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
8) $\forall a, b, c \in R$ выполнено $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Ассоциативные кольца с единицей будем называть просто кольцами. Кольцо R называется коммутативным, если $\forall a, b \in R$ $a \cdot b = b \cdot a$. Примерами коммутативных колец являются множества целых $\mathbb{Z}$, рациональных $\mathbb{Q}$, вещественных $\mathbb{R}$, комплексных $\mathbb{C}$ чисел относительно естественных операций сложения и умножения. Знак умножения $\cdot$ часто опускается при записи.

Определение 8 (Матрица)**.** Пусть R — некоторое кольцо. Матрицей $n \times k$ над этим кольцом называется таблица из n строк и k столбцов, заполненная $n \cdot k$ элементами из R:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Элемент кольца R, лежащий в i-ой строке и j-ом столбце матрицы A, обозначается A_{ij} или a_{ij}. Множество всех матриц размера $n \times k$ над кольцом R обозначается $M_{n \times k}(R)$. Если $n = k$, то пишут просто $M_n(R)$.

Определение 9 (Сложение и умножение квадратных матриц)**.** Пусть R — кольцо. Пусть A и B — две матрицы $n \times n$. Матрицу C размера $n \times n$ назовём их суммой, если $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$. Сумму матриц A и B будем обозначать $A + B$. Произведением $A \cdot B$ называется матрица C, что $C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$.

Свойства. Относительно этих операций множество квадратных матриц $n \times n$ образует кольцо (ассоциативное с единицей). Нулём служит матрица O с $O_{ij} = 0$, единицей служит матрица E, что $E_{ij} = 0$ для $i \neq j$ и $E_{ii} = 1$. При $n \geq 2$ это кольцо не коммутативно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ при том, что } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 10 (Упорядоченное множество)**.** Пусть M — некоторое множество. Порядком на M называется бинарное отношение, которое будем обозначать $\leq$, со следующими свойствами:
а) Для любых $x \in M$ верно, что $x \leq x$;
б) Для любых x и y из M условия $x \leq y$ и $y \leq x$ влекут, что $x = y$;
в) Для любых x, y и z из M из условий $x \leq y$ и $y \leq z$ следует, что $x \leq z$.
Так, например, на множествах всех вещественных $\mathbb{R}$, рациональных $\mathbb{Q}$, целых $\mathbb{Z}$ и натуральных $\mathbb{N}$ чисел имеется естественный порядок. Множество с заданным порядком будем называть частично упорядоченным множеством или, для краткости, упорядоченным множеством. На любом подмножестве A упорядоченного множества M можно ввести порядок, ограничив его с M.