ПРАВИТЕЛЬСТВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГА
КОМИТЕТ ПО НАУКЕ И ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

ЗАДАЧИ ВТОРОГО САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ОТКРЫТОГО ТУРНИРА ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

Санкт-Петербург, 24-30 марта 2014 г.

1. ИДЕМПОТЕНТЫ В ПОЛУГРУППЕ. Пусть на конечном множестве A задана ассоциативная операция $*$. Тогда $(A, *)$ – конечная полугруппа. Элемент p полугруппы A назовем идемпотентом, если $p * p = p$.

1. Известно, что в конечной полугруппе каждый элемент в некоторой степени равен нулю полугруппы. Докажите, что существует такое $n \in \mathbb{N}$, что для любых $a_1,\ a_2, \dots, a_n$ (элементов полугруппы) их произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 0$.
2. Верно ли, что в любой конечной полугруппе найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что произведение любых n попарно различных элементов является идемпотентом?
3. Верно ли, что для любой конечной полугруппы $A = \{a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n\}$ найдется такая перестановка $\pi(n)$, что произведение $a_{\pi(1)} \cdot a_{\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n)}$ является идемпотентом в полугруппе A?

2. БЕСКОНЕЧНЫЕ РАДИКАЛЫ. Бесконечные радикалы (итерации радикалов)

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \ldots}}}; \qquad \ldots \sqrt{a_3 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_1}}}; \qquad \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots}}}$$

будем называть соответственно правыми, левыми и нейтральными, понимая их как пределы сходящихся последовательностей

$$x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \ldots + \sqrt{a_n}}}} \qquad y_n = \sqrt{a_n + \ldots + \sqrt{a_3 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_1}}}};$$

$$z_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}.$$

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{2 + x}$. Пусть $a_1 \geqslant -1$ и $a_{n+1} = f(a_n)$. При каких a_1 последовательность (a_n) ограничена; монотонна; сходится?
2. Докажите, что при $a > 0$

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots}}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

и, как следствие,

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \quad \textbf{(золотое сечение)}.$$

3. Докажите, что при $a > 0$

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{a^{2^2} + \sqrt{a^{2^3} + \ldots}}} = a\varphi.$$

4. Исследуйте нейтральные радикалы k степени (здесь $a \geqslant 0$ и $k \geqslant 2$ – натуральное число)

$$\sqrt[k]{a + \sqrt[k]{a + \sqrt[k]{a + \ldots}}}$$

и получите аналоги формул пункта 3.

5. Исследуйте на сходимость последовательности

$$x_n = \sqrt[k_1]{a + \sqrt[k_2]{a + \sqrt[k_3]{a + \ldots + \sqrt[k_n]{a}}}}, \quad y_n = \sqrt[k_n]{a + \sqrt[k_{n-1}]{a + \sqrt[k_{n-2}]{a + \ldots + \sqrt[k_1]{a}}}}$$

при любом выборе натуральных чисел $k_n > 2$. Интересным является, например, пермодический случай, когда $k_{n+p} = k_n$ для некоторого фиксированного числа p.

6. Докажите, что если $a_n \geqslant 0$, то последовательность

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \ldots + \sqrt{a_n}}}}$$

сходится тогда и только, когда последовательность $\sqrt[2^n]{a_n}$ ограничена.

7. Докажите, что если $a_n \geqslant 0$, то последовательность

$$\sqrt{a_n + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_{n-2} + \ldots + \sqrt{a_1}}}}$$

сходится тогда и только, когда последовательность a_n сходится.

8. Получите необходимое и достаточное условие сходимости для последовательностей

$$\sqrt[k_1]{a + \sqrt[k_2]{a + \sqrt[k_3]{a + \ldots + \sqrt[k_n]{a}}}}, \qquad \sqrt[k_n]{a + \sqrt[k_{n-1}]{a + \sqrt[k_{n-2}]{a + \ldots + \sqrt[k_1]{a}}}}$$

(здесь $a_n \geqslant 0$ и $k_n > 2$ – последовательность натуральных чисел).

9. Самостоятельно постройте и исследуйте на сходимость последовательности содержащие бесконечные радикалы, например,

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{n! + \sqrt[n]{n! + \ldots + \sqrt[n]{n!}}}.$$

3. КОНЕЧНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ. Группа $(A,\ *)$ называется абелевой, если

$$\forall\ a,\ b \in A \quad a * b = b * a.$$

.

1. Докажите, что конечная группа, состоящая из двух или из трех элементов, является абелевой. Для других малых n исследуйте ситуацию. Будет ли группа, состоящая из 9 элементов, абелевой?

2. Вообще, для каких натуральных n можно гарантировать, что конечная группа, состоящая из n элементов, является абелевой?

4. О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ. Рассмотрим уравнение $\sqrt[3]{\overline{abcd}} = a + b + c + d$. Легко проверить, что $\sqrt[3]{5832} = 5 + 8 + 3 + 2$ и $\sqrt[3]{4913} = 4 + 9 + 1 + 3$.

1. Докажите, что других решений это уравнение не имеет.

2. Докажите, что уравнение $\sqrt[3]{\overline{abc}} = a + b + c$ имеет единственное решение $\sqrt[3]{512} = 5 + 1 + 2$.

3. Известно также, что $\sqrt[3]{17\ 576} = 1+7+5+7+6$. А в общем случае для пятизначного числа?

4. Продолжите обобщение.

5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИЗ МОДУЛЕЙ. Последовательность (a_n) натуральных чисел $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ составляется по следующему рекуррентному закону:

$$a_0, a_1, \quad a_{n+1} = |a_n - a_{n-1}| \qquad (a_0 \text{ и } a_1 \text{ заданы}).$$

Продолжается последовательность до первого нуля.

1. Известно, что каждое число, входящее в последовательность, не превосходит 1998. Какое наибольшее количество членов может содержать такая последовательность?

   Изучите свойства последовательности (a_n) для случаев:
2. Рациональных чисел;
3. Любых действительных чисел;

4. Последовательность (a_n) строится по правилу

$$a_0, \ a_1, \ a_{n+1} = |a_n - \beta \cdot a_{n-1}|$$

   (a_0, a_1 и β заданы; члены последовательности, как и в случаях 1., 2., 3., являются натуральными, рациональными либо действительными числами).

Попробуйте получить общие условия на a_0 и a_1, обеспечивающие конечность указанных последовательностей, и оценить количество членов последовательностей в этих случаях.

6. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ МНОГОЧЛЕНОВ. Рассмотрим последовательность многочленов $P_0, \ P_1, \ \ldots$, определяемую условиями:

$$P_0(x) = 1, \ P_1(x) = x, \ P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x), \ n \geqslant 1.$$

1. Докажите, что

$$\underbrace{x - \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{x - \cdots - \frac{1}{x}}}}_{n \text{ раз}} = \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)};$$

2. Докажите, что

$$\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} = P_n(2\cos\varphi), \text{ если } \frac{\varphi}{\pi} \text{ – не целое;}$$

3. Докажите, что

$$\left(t^{n+1} - \frac{1}{t^{n+1}}\right) = \left(t - \frac{1}{t}\right) P_n\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad \text{если} \quad t \neq 0;$$

4. Докажите, что

$$P_n(x) = \prod_{1\leqslant k\leqslant n}\left(x - 2\cos\frac{\pi k}{n+1}\right); \qquad 5)\ P_n(x) = \sum_{0\leqslant j\leqslant \frac{n}{2}} (-1)^j C_{n-j}^j x^{n-2j};$$

5. Докажите, что

$$\prod_{1\leqslant k\leqslant m} \cos\frac{\pi k}{2m+1} = \frac{1}{2^m}.$$

6. Придумайте и докажите аналогичные равенства для последовательности многочленов, определяющихся тем же соотношением, но с другими начальными условиями.

7. `ШАЛОВЛИВЫЕ СВЯЗИСТЫ.` Два связиста играют в игру по следующими правилам: имеется n телефонных узлов, и связисты по очереди соединяют кабелями два из них по своему выбору. Выигрывает тот, после хода которого с любого узла можно будет дозвониться до любого другого (может быть, через несколько промежуточных).

1. Выясните, кто выиграет при $n = 4, 5, 6, 7, 8$ – начинающий или его партнер?

2. Каков ответ при произвольном n?

3. Рассмотрите видоизмененные варианты игры. Например, если игрок, связавший все узлы, проигрывает. Ответьте на поставленные вопросы для такой игры. А если все узлы изначально связаны друг с другом и связисты по очереди убирают по одному соединению? Игрок, нарушивший связь, проигрывает. Проанализируйте такую игру

8. `ПОДЕЛИМ -- ПОСМОТРИМ.`

1. Докажите, что число e при любом натуральном n заключено между числами
$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{и} \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

2. Исследуйте на монотонность последовательности:
$$c_n = \left(1+\frac{1}{4n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad d_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

3. Разделим отрезок $[a_n,\ b_n]$ на четыре равных отрезка. В каком из них лежит число e?

4. Разделим отрезок $[a_n,\ b_n]$ на восемь равных отрезков. В каком из них лежит число e?

5. Исследуйте задачу, если отрезок разделен на 2^k равных отрезка. Интерес представляет результат для достаточно больших n, например, для $n > 2^k$.
6. Исследуйте пункты 3, 4 и 5 данной задачи для последовательностей c_n и d_n.

9. `РАССТОЯНИЯ НА ПЛОСКОСТИ.` Рассмотрим произвольное множество A_n, состоящее из n точек плоскости. Обозначим через a_n наименьшее возможное число различных попарных расстояний между точками множества A_n.

1. Найдите значение a_n для $n = 3, 4, 5$.

2. Докажите, что $a_{31} \geqslant 5$. Попытайтесь улучшить эту оценку.

3. Оцените значение a_n для произвольных натуральных n.

4. Существуют ли числа $\alpha > 0$ и $\beta < 2$ такие, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a_n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^\beta} = 0?$$

10. `БЕЗУМНОЕ ЧАЕПИТИЕ.` За круглым столом сидят n участников “безумного чаепития”. Каждую минуту одна пара соседей меняется местами. Через какое наименьшее время все участники чаепития могут оказаться сидящими в противоположном порядке (так что левые соседи у всех станут правыми и наоборот)?

1. Решите задачу для $n = 4,\ 5,\ 6$.

2. Решите задачу для любого $n \geqslant 3$.